2018 年後期

$a^4=b^2+2^c$ を満たす正の整数の組（a，b，c）で a が奇数であるものを求めよ．

考え方　シンプルな問題です．式が 1 個で文字が 3 個もあるのですが，整数問題の基本原則「積の形を作る」「素因数分解の一意性」と，a が奇数であることを上手く使えば解くことができます．

解　$a^4=b^2+2^c$ より，$a^4-b^2=2^c$．

$$(a^2+b)(a^2-b)=2^c$$

素因数分解の一意性より，

$$a^2+b=2^k \quad \cdots①$$

$$a^2-b=2^l \quad \cdots②$$

（k と l は 0 以上の整数で，$k>l$，$k+l=c$）

①＋② より，

$$2a^2=2^k+2^l$$

$$2^1a^2=2^l(2^{k-l}+1)$$

a と $2^{k-l}+1$ は奇数なので，素因数分解の一意性より

$$l=1,\quad a^2=2^{k-l}+1$$

$$\therefore\ a^2=2^{k-1}+1 \quad \cdots(※)$$

a は奇数なので，$a=2m+1$ とおくと（m は 0 以上の整数）

$$(2m+1)^2=2^{k-1}+1$$

$$4m^2+4m+1=2^{k-1}+1$$

$$4m(m+1)=2^{k-1}$$

$$m(m+1)=2^{k-3}$$

m と $m+1$ は連続する 2 整数だから，一方は必ず奇数である．右辺に含まれる素因数は 2 だけなので，素因数分解の一意性より，その連続する 2 整数は 1 と 2 でなければならない．

$$\therefore\ m=1,\quad k=4$$

したがって，$a=3$

① に，$a=3$，$k=4$ を代入して，$b=7$．

もとの式に，$a=3$，$b=7$ を代入して，$c=5$．

$$\therefore\ (a,\ b,\ c)=(3,\ 7,\ 5)$$

■

注　上の 解 では，$a^2=2^{k-1}+1$ の後，$a=2m+1$ とおいて処理していますが，そうせずに，それまでと同じような手法で解くこともできます．

$a^2-1=2^{k-l}$ より

$$(a+1)(a-1)=2^{k-1}$$

素因数分解の一意性より

$$a+1=2^\alpha \quad \cdots③$$

$$a-1=2^\beta \quad \cdots④$$

（α と β は 0 以上の整数で，$\alpha>\beta$，$\alpha+\beta=k-1$）

③ − ④ より，

$$2=2^\alpha-2^\beta$$

$$2^1=2^\beta(2^{\alpha-\beta}-1)$$

$2^{\alpha-\beta}-1$ は奇数なので，素因数分解の一意性より

$$\beta=1,\quad 2^{\alpha-\beta}-1=1$$

$$\therefore\ \alpha=2,\quad \beta=1$$

したがって，③ より，$a+1=2^2$．$\therefore\ a=3$．

また，$\alpha+\beta=3$ より，$k=4$．（以下略）