2019 年後期

以下の問いに答えよ．

(1) a，b を整数とする．2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が有理数の解をもつならば，その解は整数で，b の約数であることを示せ．

(2) n を正の整数とする．$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ は無理数であることを示せ．

考え方　(1) の前半は 2016 年後期と全く同じ問題です．過去問をやっていた人はラッキーでしたね．でも，これは受験数学の定番問題だから (過去問を解いた，解いていないにかかわらず) 解けなければなりません．

(2) は，おそらく (1) の結果を利用するのですが，どのように利用するのかが難しい．とりあえずは，無理数に関する証明問題なので，背理法を使いましょう．$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ が有理数だと仮定すると，どのようなことが生じるのでしょうか．

なお，2007 年の京大文系で (2) とほぼ同じ問題が出題されています (参考 参照)．

解

(1) 有理数の解を $x=\dfrac{q}{p}$ ($p>0$，p と q は互いに素) とおく．このとき，

$$\left(\frac{q}{p}\right)^2+a\left(\frac{q}{p}\right)+b=0$$

$$q^2+apq+bp^2=0$$

$$q^2=-apq-bp^2$$

$$q^2=p(-aq-bp)$$

p，q，a，b は整数なので，$-aq-bp$ は整数．

よって，q^2 は p で割り切れるが，p と q は互いに素なので，$p=1$．つまり，有理数解 $\dfrac{q}{p}=q$ は整数である．

つまり，2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ は整数解 $x=q$ をもつので

$$q^2+aq+b=0$$

$$b=q(-q+a)$$

$-q+a$ は整数なので，q は b の約数である．

(2) 背理法で示す．

$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ が有理数であると仮定すると

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}=r\ (r\text{ は有理数})\quad\cdots①$$

とおける．

$$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=1$$

より，

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{r}\quad\cdots②$$

$(①\pm②)\times\dfrac{1}{2}$ より

$$\sqrt{n}=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right),\quad \sqrt{n+1}=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$$

つまり，

$\sqrt{n}$ も $\sqrt{n+1}$ も有理数

である．

さて，有理数 $\sqrt{n}$ は整数係数の 2 次方程式

$$x^2-n=0$$

の解なので，(1) より，それは整数である．

有理数 $\sqrt{n+1}$ も整数係数の 2 次方程式

$$x^2-(n+1)=0$$

の解なので，(1) より，それは整数である．つまり，

$\sqrt{n}$ も $\sqrt{n+1}$ も整数

である．よって

$$\sqrt{n}=k,\quad \sqrt{n+1}=l\qquad (k,\ l\text{ は自然数})$$

とおくと，$n=k^2$，$n+1=l^2$ より

$$l^2-k^2=1$$

$$(l+k)(l-k)=1$$

k と l は自然数なので，$l+k \geqq 2$．$l-k$ は整数なので，この等式を満たす自然数 k，l は存在しない．よって，矛盾．

したがって，$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ は無理数である．

■

✎注　(2) の証明の流れを再確認しておきましょう．

$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ が有理数

$\Longrightarrow\sqrt{n}$ も $\sqrt{n+1}$ が有理数

$\Longrightarrow\sqrt{n}$ も $\sqrt{n+1}$ が整数

$\Longrightarrow$矛盾

つまり，上の 3 つの $\Longrightarrow$ のうち，2 つめの $\Longrightarrow$ の証明に (1) の結果を利用したわけです．

では，もし (1) がなかったら，どうすれば良いのでしょうか．実は，(1) がなくても

$\sqrt{n}$ が有理数　$\Longrightarrow$　$\sqrt{n}$ が整数

であることは簡単に示すことができます．やってみましょう．

$\sqrt{n}$ が有理数であると仮定すると，

$$\sqrt{n}=\frac{q}{p}\quad (p>0,\ p \text{ と } q \text{ は互いに素})$$

このとき

$$n=\frac{q^2}{p^2}$$

p と q が互いに素なので，p^2 と q^2 も互いに素．したがって，$\dfrac{q^2}{p^2}$ が整数になるのは $p^2=1$ のときで，このとき

$$n=q^2$$

つまり n は平方数なので，$\sqrt{n}$ は整数である．

2 つめの $\Longrightarrow$ の証明ができました．

✎注　3 つめの $\Longrightarrow$ の証明の別解も紹介しておこう．

$\sqrt{n}$ も $\sqrt{n+1}$ も整数で，$1 \leqq \sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ であることに注意すると，等式

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

は矛盾を示しています．なぜなら，

(左辺) $=\sqrt{n+1}-\sqrt{n+1} \geqq 1$ である．

また，$\sqrt{n+1}$ と $\sqrt{n}$ は整数なので

$$0<\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<1$$

つまり，$0<$ (右辺) <1 となり矛盾．

✎注　(2) は次のような解法もあります．

$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ が有理数であると仮定すると

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}=r\quad (r \text{ は有理数})$$

ここで両辺を 2 乗して

$$n+2\sqrt{n(n+1)}+n+1=r^2$$

$$\sqrt{n(n+1)}=\frac{r^2-2n-1}{2}$$

つまり，$\sqrt{n(n+1)}$ は有理数．

ところで，有理数 $\sqrt{n(n+1)}$ は，整数係数の 2 次方程式

$$x^2-n(n+1)=0$$

の解なので，(1) の結果より，それは整数である．つまり，$\sqrt{n(n+1)}$ は整数である．

ここで，不等式

$$n^2<n(n+1)<(n+1)^2$$

が成立する．よって，

$$n<\sqrt{n(n+1)}<n+1$$

つまり，$\sqrt{n(n+1)}$ は連続する 2 整数の間に存在するので，矛盾．

この別解の流れは，

$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ が有理数

$\Longrightarrow\sqrt{n(n+1)}$ が有理数

$\Longrightarrow\sqrt{n(n+1)}$ が整数

$\Longrightarrow$矛盾

となっています．この解法もシンプルですね．

参考　2007 年の京大文系の類題を紹介します．解答は，今回の一橋とほぼ同じです．

> n を 1 以上の整数とするとき，次の 2 つの命題はそれぞれ正しいか．正しいときは証明し，正しくないときは理由を述べよ．
> 命題 p : ある n に対して，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ はともに無理数である．
> 命題 q : すべての n に対して，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は無理数である．

解　命題 p は「正しくない」．命題 q は「正しい」