2019 年前期

p を自然数とする．数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_2 = p^2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 13 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

により定める．数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在することを示せ．

考え方　「存在することを示せ」と問われると大変難しそうに聞こえますが，ようするに，存在することを示すだけなのですから，何でも良いからとにかく 1 個「あるよ」と提示すれば良いのです．このようなタイプの問題は，いわゆる「存在証明」と呼ばれ，難関大学ではよく見られる問題です．

a_1 と a_2 は平方数なので，次の a_3 を調べることになるでしょう．$a_3 = p^2+12$ になるので，これが平方数になるための p の条件を考えましょう．少し実験すると

p	1	2	3	4	5	6
p^2+12	13	16	21	28	37	48

どうやら，a_3 が平方数になるのは $p=2$ だけのようです．

つまり，$p \neq 2$ ならば，a_3 が平方数ではないので，確かに「ある」．では，$p=2$ のときは，$a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=16$ ですべて平方数ですが，$a_4=25$，$a_5=22$ となって，a_5 が平方数ではありません．これで「平方数でない項が存在すること」の証明が完了しました．

解　$a_1 = 1$，$a_2 = p^2$ より，a_1 と a_2 は平方数である．

このとき，

$$a_3 = a_2 - a_1 + 13 = p^2 + 12$$

ここで，a_3 が平方数になる p を求める．

$$p^2 + 12 = m^2 \ (m \text{ は自然数})$$

とすると，$m^2 - p^2 = 12$ より

$$(m+p)(m-p) = 12$$

$(m+p)+(m-p) = 2m$（偶数）なので，$m+p$ と $m-p$ の偶奇性は一致する．また $m+p > m-p$ より

$$m+p = 6, \quad m-p = 2$$

よって

$$m = 4, \quad p = 2$$

つまり，a_3 が平方数になるような p は $p=2$ に限られる．

$p=2$ のとき，

$a_1 = 1$（平方数）
$a_2 = 4$（平方数）
$a_3 = a_2 - a_1 + 13 = 16$（平方数）
$a_4 = a_3 - a_2 + 13 = 25$（平方数）
$a_5 = a_4 - a_3 + 13 = 22$（平方数ではない）

つまり，$p=2$ のときは，a_5 が平方数にならない．

以上より，$p \neq 2$ のときは a_3 が平方数でなく，$p=2$ のときは a_5 が平方数でない．

よって，数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在することが証明された．

■

注　ひょっとすると，この漸化式を解こうと思った人もいるかもしれませんが，やめた方が良いでしょう．解けないことはありませんが…．以下、方針だけ述べておきます．

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 13$$

より，

$$a_{n+1} = a_n - a_{n-1} + 13 \ (n \geqq 2)$$

辺々を引いて

$$a_{n+2} - a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) - (a_n - a_{n-1})$$

$a_{n+1} - a_n = b_n$ とおくと

$$b_{n+1} - b_n + b_{n-1} = 0 \quad (n \geqq 2)$$

この 3 項間漸化式を解いて b_n を求めます．次に，$a_{n+1} - a_n = b_n$ より，階差数列の手法を使って，a_n を求めることができます．

やってみれば分かりますが，この 3 項間漸化式の特性方程式 ($t^2 - t + 1 = 0$) は因数分解できないどころか，虚数解をもちます．つまり，数列 $\{a_n\}$ の各項は実数なのに，一般項が虚数単位 i を使って表されるという，とんでもない状況になってしまいます．だから，一般項を求めるのは得策ではありません．

ちなみに，2010 年の前期にも 3 項間漸化式が出題されていますが，これは特性方程式が因数分解でき，簡単に解くことができました．