2022 年後期

$\log_y(6x+y)=x$ を満たす正の整数 x，y の組を求めよ．

考え方　一橋大らしいシンプルな良問です．まず，$6x+y=y^x$ と変形すると思います（この時点で log はほぼ無意味）．とりあえず，x や y に具体的に数字を入れて考えてみると，まず，$x=1$ のときも $y=1$ のときも不成立なので，$x \geqq 2$，$y \geqq 2$ であることがわかります．ここからが問題です．

$6x+y=y^x$ において，x を基準に考えると，左辺が x の 1 次関数で右辺が x の指数関数なので，「指数関数の方が 1 次関数よりも圧倒的にデカい」という感覚から，x も y もそんなに大きな整数にはならないことが予想できます（例えば，$y=10$ とでもすると，$6x+10=10^x$．2 以上の整数 x を代入すると右辺の方が圧倒的にデカいから，等号成立するわけありませんね）．

なので，とり得る値の範囲を絞り込んで，順番に検討すれば良いのですが，なかなか答案が書きにくいです．

次のように考えましょう．

$6x+y=y^x$ より，

$$y^x-(6x+y)=0$$

を満たす x と y を求めれば良いのですが，先ほど述べたように「指数関数の方が 1 次関数よりも圧倒的にデカい」ので，$y^x-(6x+y)$ はたいてい正の数になるはずです．よって，$y^x-(6x+y)$ が負から正に変化する箇所に注目します．

まずは，$y^x-(6x+y)$ の大小関係に注目しましょう．

解　$\log_y(6x+y)=x$ より，$6x+y=y^x$．

$x=1$ とすると，$6+y=y$ となり矛盾．

$y=1$ とすると，$6x+1=1$ となり矛盾．

よって，$x \geqq 2$，$y \geqq 2$ である．

ここで，

$$f_y(x)=y^x-6x-y$$

とおく．$f_y(x)=0$ となる，2 以上の整数 x，y を求めればよい．

（✏注　y を固定して x の関数と見ています．）

$$\begin{aligned}&f_y(x+1)-f_y(x)\\=&\{y^{x+1}-6(x+1)-y\}-(y^x-6x-y)\\=&y^{x+1}-y^x-6\\=&y^x(y-1)-6\end{aligned}$$

(i)　$y=2$ のとき，

$f_2(x+1)-f_2(x)=2^x-6$　($x \geqq 2$)　なので

$x=2$ として，$f_2(3)-f_2(2)=-2<0$

$x=3$ として，$f_2(4)-f_2(3)=2>0$

$x=4$ として，$f_2(5)-f_2(4)=10>0$

……

したがって，大小関係は次のように決まる．

(※)　$f_2(2)>f_2(3)<f_2(4)<f_2(5)<\cdots\cdots$

$f_2(2)=2^2-6\cdot2-2=-10$ なので，$f_2(3)\neq 0$

$f_2(4)=2^4-6\cdot4-2=-10$

$f_2(5)=2^5-6\cdot5-2=0$

よって，不等式の列（※）で 0 になるのは $f_2(5)$ のみである．

$$\therefore\quad x=5,\ y=2$$

(ii)　$y \geqq 3$ のとき，

$x \geqq 2$ なので，

$$f_y(x+1)-f_y(x)=y^x(y-1)-6>0$$

したがって，大小関係は次のように決まる．

$$f_y(2)<f_y(3)<f_y(4)<f_y(5)<\cdots\cdots$$

(a)　$y=3$ のとき

$$f_3(2)<f_3(3)<f_3(4)<f_3(5)<\cdots\cdots$$

$f_3(2)=3^2-6\cdot2-3=-6<0$

$f_3(3)=3^3-6\cdot3-3=6>0$

なので，$f_3(x)=0$ となる x は存在しない．

(b)　$y=4$ のとき

$$f_4(2)<f_4(3)<f_4(4)<f_4(5)<\cdots\cdots$$

$f_4(2)=4^2-12-4=0$ なので，$f_4(x)=0$ となる x は $x=2$ のみ．

(c) $y \geqq 5$ のとき

$f_y(2) = y^2 - 12 - y = y(y-1) - 12 > 0$ なので

$$0 < f_y(2) < f_y(3) < f_y(4) < f_y(5) < \cdots\cdots$$

となり，$f_y(x) = 0$ となる x，y は存在しない．

よって，(a)(b)(c) より，

$$\therefore \quad x = 2,\ y = 4$$

したがって，(i)(ii) より，求める正の整数 x，y の組は

$$(x,\ y) = (2,\ 4),\ (5,\ 2)$$

である．

■