2022 年前期

$2^a3^b+2^c3^d=2022$ を満たす 0 以上の整数 a，b，c，d の組を求めよ．

考え方　「2022」をテーマにした問題は予想していた人もいるかもしれませんが，まさか，こう出題されるとは，さすが一橋大ですね（って，感心している場合ではない）．なかなかの良問です．

まず，$2022=2\times3\times337$ と素因数分解されます．つまり，2 と 3 で 1 回ずつ割れます（これが最大のポイント）．この時点で，整数 a，b，c，d の候補が（ある程度）絞り込めたことに気づくでしょうか？

例えば，2 の指数 a と c に注目します．a も c もどちらも 2 以上ならば，左辺は 2 で 2 回以上割れることになるので矛盾します．よって，a と c のうち少なくとも一方が 1 以下（つまり 0 または 1）になります．

b と d についても同様の議論をすれば，b と d のうち少なくとも一方が 1 以下（つまり 0 または 1）になります．

あとは，対称性などにも考慮して，要領よく場合分けしていきましょう．

解

$$2^a3^b+2^c3^d=2022 \quad \cdots\cdots①$$

$2022=2\times3\times337$ より，① の右辺は 2 と 3 で 1 回ずつ割れる．

① の左辺の 2 の指数 a と c に注目する．

a も c もどちらも 2 以上ならば，① の左辺は 2 で 2 回以上割れることになるので矛盾．

よって，a と c の少なくとも一方が 1 以下（つまり 0 または 1）である．

対称性より，a が 1 以下の場合だけを考えればよい．

（i）$a=0$ のとき

$$3^b+2^c3^d=2022$$

$c\geqq1$ ならば，左辺は奇数になるので矛盾．よって，$c=0$ である．このとき

$$3^b+3^d=2022$$

b も d もどちらも 2 以上ならば，左辺は 3 で 2 回以上割れることになるので矛盾．よって，b と d の少なくとも一方が 1 以下（つまり 0 または 1）である．

文字の対称性から，b の場合だけを考えれば十分である．

$b=0$ のとき，$1+3^d=2022$．左辺は 3 の倍数でないので不適．

$b=1$ のとき，$3+3^d=2022$．$3^d=2019$．

$3^6=729$，$3^7=2187$ なので，これを満たす d は存在しない．

（ii）$a=1$ のとき，

$$2\cdot3^b+2^c3^d=2022$$

$c=0$ ならば，左辺は奇数になるので不適．よって，$c\geqq1$

$$3^b+2^{c-1}3^d=1011 \quad \cdots\cdots②$$

$1011=3\times337$ より，② の右辺は 3 で 1 回割れる．

ここで，b も d もどちらも 2 以上ならば，② の左辺は 3 で 2 回以上割れることになるので矛盾．

したがって，b と d の少なくとも一方が 1 以下（つまり 0 か 1）である．（今度は，b と d について対称的ではないので，それぞれ検証する）

（ア）$b=0$ のとき

$$1+2^{c-1}3^d=1011$$
$$2^{c-1}3^d=1010$$

$1010=2\times5\times101$ なので，素因数分解の一意性より不適．

（イ）$b=1$ のとき

$$3+2^{c-1}3^d=1011$$
$$2^{c-1}3^d=1008$$

$1008=2^4\times3^2\times7$ なので，素因数分解の一意性より不適．

（ウ）$d=0$ のとき

$$3^b+2^{c-1}=1011$$

$1011=3\times337$ であるが，左辺は 3 の倍数でないので不適．

（エ）$d=1$ のとき

$$3^b+2^{c-1}\cdot 3=1011$$

$b=0$ ならば，左辺は 3 の倍数でないので矛盾．よって，$b \geqq 1$.（ア）より $b=1$ の場合は不適なので，$b \geqq 2$.

$$3^{b-1}+2^{c-1}=337$$

$3^5=243$，$3^6=729$ なので，$b-1 \leqq 5$.

$b \geqq 2$ より，$2 \leqq b \leqq 6$

$b=2$ のとき，$2^{c-1}=334=2\cdot 167$

$b=3$ のとき，$2^{c-1}=328=2^3\cdot 41$

$b=4$ のとき，$2^{c-1}=310=2\cdot 5\cdot 31$

$b=6$ のとき，$2^{c-1}=94=2\cdot 47$

いずれの場合も，素因数分解の一意性より不適.

$b=5$ のとき，$2^{c-1}=256=2^8$．$\therefore\ c=9$.

以上より

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 5,\ 9,\ 1)$$

最後に，c が 1 以下の場合も考慮すると，上記の組で a と c，b と d を入れ換えればよいので，求める整数の組は

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 5,\ 9,\ 1),(9,\ 1,\ 1,\ 5)$$

■

✎注

$$3^b+2^{c-1}3^d=1011 \quad \cdots\cdots②$$

以降ですが，b と d の少なくとも一方が 1 以下であることに注目して場合分けしましたが，$3^6=729$，$3^7=2187$ なので，$0 \leqq b \leqq 6$ だから，b に順番に数を代入して検証しても構いません．結局，（エ）で一つ一つ検証することになるわけですし．ここでもポイントは，素因数分解の一意性です．