2023 年後期

$\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{2023}$ を満たす自然数の組（m，n）の個数を求めよ．

考え方　$\sqrt{2023}=17\sqrt{7}$ なので，和が $17\sqrt{7}$ になるのは，直観的に考えれば，

$$\sqrt{7}+16\sqrt{7},\ 2\sqrt{7}+15\sqrt{7},\ \cdots\cdots,\ 16\sqrt{7}+\sqrt{7},$$

の 16 組しかないのは，ほとんど明らかなんですが，「これら以外には存在しない」ことを示さないと正解にはなりません．当たり前のことを厳密に示すのって難しいですよね．

解　$\sqrt{2023}=17\sqrt{7}$ より，$\sqrt{m}+\sqrt{n}=17\sqrt{7}$
$\sqrt{m}=17\sqrt{7}-\sqrt{n}$ として，両辺を 2 乗すると

$$m=2023-34\sqrt{7n}+n$$
$$34\sqrt{7n}=2023+n-m$$

右辺は整数なので，$n=7\alpha^2$ となる（α は正の整数）．
$\sqrt{n}=17\sqrt{7}-\sqrt{m}$ として，両辺を 2 乗すると

$$n=2023-34\sqrt{7m}+m$$
$$34\sqrt{7m}=2023+m-n$$

右辺は整数なので，$m=7\beta^2$ となる（β は正の整数）．

$\sqrt{m}+\sqrt{n}=17\sqrt{7}$ に，$n=7\alpha^2$ と $m=7\beta^2$ を代入すると

$$\alpha\sqrt{7}+\beta\sqrt{7}=17\sqrt{7}$$
$$\therefore\quad \alpha+\beta=17$$

α と β は正の整数なので，$(\alpha,\ \beta)$ の組み合わせは，

$$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 16),\ (2,\ 15),\ \cdots\cdots,\ (16,\ 1)$$

の 16 組ある．
　したがって，自然数の組（m，n）の個数も 16 組である．

■