2023 年前期

n を 2 以上 20 以下の整数，k を 1 以上 $n-1$ 以下の整数とする．

$${}_{n+2}\mathrm{C}_{k+1} = 2\left({}_n\mathrm{C}_{k-1} + {}_n\mathrm{C}_{k+1}\right)$$

が成り立つような整数の組 $(n,\ k)$ を求めよ．

考え方 二項定理に関する問題は難問が多いのですが，今回は，二項定理の定義式を当てはめてどんどん計算するだけで，n と k のシンプルな 2 次式になります．この 2 次式をどのように解釈 (変形) するのかがポイントです．

解 ${}_{n+2}\mathrm{C}_{k+1} = 2\left({}_n\mathrm{C}_{k-1} + {}_n\mathrm{C}_{k+1}\right)$ より，

$$\frac{(n+2)!}{(k+1)!(n-k+1)!} = 2\left\{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\right\}$$

両辺に $(k+1)!(n-k+1)!$ をかけて

$$(n+2)! = 2\{n!(k+1)k + n!(n-k+1)(n-k)\}$$

両辺を $n!$ で割って

$$(n+2)(n+1) = 2\{(k+1)k + (n-k+1)(n-k)\}$$

$$n^2+3n+2 = 2(k^2+k+n^2-nk-nk+k^2+n-k)$$

$$]n^2+3n+2 = 4k^2+2n^2-4nk+2n$$

k の 2 次式とみて，

$$4k^2-4nk+n^2-n-2=0$$

$$k = \frac{2n \pm \sqrt{4n+8}}{4} = \frac{n \pm \sqrt{n+2}}{2} \quad \cdots(※)$$

k が整数になるためには，$n+2$ が平方数になることが必要である．

$2 \leqq n \leqq 20$ より，$4 \leqq n+2 \leqq 22$ なので，

$$n+2 = 4,\ 9,\ 16$$

$$\therefore\ \ n = 2,\ 7,\ 14$$

(i) $n=2$ のとき，

(※) より，$k = \dfrac{2 \pm \sqrt{4}}{2} = 0,\ 2$

これは，$1 \leqq k \leqq 1$，すなわち，$k=1$ という条件に反する．

(ii) $n=7$ のとき，

(※) より，$k = \dfrac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = 2,\ 5$

$1 \leqq k \leqq 6$ より，共に適する．

よって，$(n,\ k) = (7,\ 2),\ (7,\ 5)$

(iii) $n=14$ のとき，

(※) より，$k = \dfrac{14 \pm \sqrt{16}}{2} = 5,\ 9$

$1 \leqq k \leqq 13$ より，共に適する．

よって，$(n,\ k) = (14,\ 5),\ (14,\ 9)$

以上より，

$$(n,\ k) = (7,\ 2),\ (7,\ 5),\ (14,\ 5),\ (14,\ 9)$$

■

注 2 次式 $4k^2-4nk+n^2-n-2=0$ の変形に悩んだかも知れません．「積の形を作る」という原則のもと，因数分解などを試みてもうまくいきませんし，判別式 $\geqq 0$ を計算しても．範囲を絞り込むことができません．ここは，素直に，解の公式を用いて，整数になるには，ルートの中身が平方数になる必要があることを利用しましょう．