1　直線上の点 (教科書 p64～p66)
2　平面上の点 (教科書 p67～p71)
3　直線の方程式 (教科書 p72～p74)
4　２直線の関係 (教科書 p75～p77)
5　直線に関して対称な点 (教科書 p78)
6　点と直線の距離 (教科書 p79～p80)
7　図形の性質の証明 (教科書 p81)
8　円の方程式 (教科書 p83～p85)
9　円と直線 (教科書 p86～p89)
10　円の接線 (教科書 p90～p91)
11　２つの円 (教科書 p92～p95)

12　軌跡と方程式 (教科書 p97〜p99)

この章の目標　「軌跡」の意味を理解し，軌跡の方程式を正しく求められるようになろう．

まず，「軌跡」の定義は次のようなものです．

▷Point◁ **軌跡とは**
与えられた条件を満たす点が動いてできる図形を，その条件を満たす点の**軌跡**という．

これだけ読んでも「はあ？」って感じでしょうが，要するに，点が動くとその足跡にそって何らかの図形ができる，その図形を『軌跡』というのです．

なので，点の動きをイメージすれば，どのような軌跡を描くのかは予想がつきます．

☆軌跡の具体例☆

- 平面上に点 A があり，点 P が AP $= r$ を満たしながら動くとき，
  点 P が描く図形は ________________
- 平面上に 2 点 A，B があり，点 P が AP = BP を満たしながら動くとき，
  点 P が描く図形は ________________

このように，点の動きが簡単にイメージできる場合は，どのような軌跡になるのかすぐに分かりますが，実際にその図形の式を求めるとなると，次のような方法で求めなければなりません．

▷Point◁ **軌跡の求め方**
「点 P の軌跡を求めよ」とは，「点 P が動いてできる図形の方程式を求めよ」ということなので，点 P$(X,\ Y)$ とおいて，X と Y の関係式を求めればよい．

✎注　点 P の座標を $(x,\ y)$ とアルファベットの小文字で設定する解答が多いですが，私の昔からのクセで $(X,\ Y)$ と大文字で書いてしまいます．別にどちらでもかまいません．

例題 1　2 点 $A(1,\ 0)$，$B(3,\ 2)$ から等距離にある点 P の軌跡を求めよ．

解　________ とおく．
点 P が満たす条件は，AP = BP なので
AP = ____________，BP = ____________，を代入して計算すると，

したがって，求める軌跡は ________________

演習 1　先ほどの $\boxed{\text{例 題}}$1 の結果が，確かに 2 点 A，B の垂直二等分線になっていることを確かめよ．

演習 2　2 点 $A(-1,\ 0)$，$B(1,\ 0)$ からの距離の 2 乗の和が 10 である点 P の軌跡を求めよ．

例題 2　2 点 $A(0,\ 0)$，$B(3,\ 0)$ からの距離の比が $2:1$ である点 P の軌跡を求めよ．

解　____________ とおく．

点 P が満たす条件は，AP : BP = 2 : 3，すなわち 3AP = 2BP なので

AP = ________________，BP = ________________，を代入して計算すると，

したがって，求める軌跡は ________________________

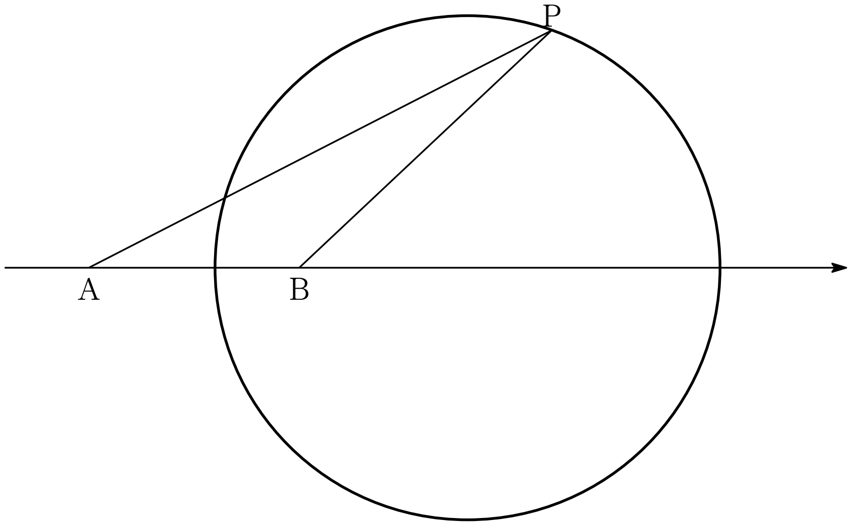
演習 3　2 点 $A(-1,\ 0)$，$B(2,\ 0)$ からの距離の比が $1:2$ である点 P の軌跡を求めよ．

参考

一般に，m，n を異なる自然数とするとき，AP : BP = $m : n$ を満たす点 P の軌跡は，線分 AB を $m : n$ に内分する点と $m : n$ に外分する点を直径の両端とする円になります (この円のことを**アポロニウスの円**と言います).

この結果は覚えておいたほうが良いでしょう.

☆例 : AP : BP = 3 : 2 となる点 P の軌跡☆



演習 4　上の 例題 2. や 演習 3. の答えが，この 参考 の事実にちゃんと当てはまっていることを確認せよ.

4STEP $\boxed{208}$，$\boxed{210}$ をやっておくこと.

▷Point◁ 「パラメータ型」軌跡の求め方

点 P の x 座標，y 座標がともに t の関数で表されているときに，点 P の軌跡を求めるには，条件式から t を消去して，X，Y の関係式を導けばよい．

このような t のことを，**媒介変数**（**パラメータ**）という．

✎注　媒介変数（パラメータ）は t だけとは限りません．他の文字（a や s など）の場合もあります．

例題 3　t が実数全体を動くとき，$P(t-1,\ 2t^3+3t)$ の軌跡を求めよ．

解　____________ とおくと，条件より，

$$\begin{cases} X = \\ Y = \end{cases}$$

これらの式より，t を消去すると，

したがって，求める軌跡は ____________________

演習 5　放物線 $y=x^2-2ax+a^2+a+3$ について，a がすべての実数値をとって変化するとき，頂点の軌跡を求めよ．

4STEP $\boxed{215}$，$\boxed{216}$をやっておくこと．

▷Point◁ 「時間の流れに沿った」軌跡の求め方

点 P がある図形上を動くとき，その動きに連動して動く点 Q の軌跡を求めるには，

Step ① 点 Q(X, Y)，点 P(s, t) とおく

Step ② 問題文から，X，Y，s，t の関係式を立てる

Step ③ s，t を X，Y で表す．

Step ③ 点 P の方程式に Step ③ の結果を代入し，X，Y の関係式を導く．

例 題 4　点 P が円 $x^2 + y^2 = 16$ 上を動くとき，点 $A(6,\ 0)$ と点 P を結ぶ線分 AP の中点 Q の軌跡を求めよ．

解　__________，__________ とおく．

まず，点 P が円 $x^2 + y^2 = 16$ 上にあるので，

____________ ……①

次に，線分 AP の中点が点 Q なので，

$x =$ ________，　$y =$ ________

すなわち，

$s =$ ________，　$t =$ ________

これを，① に代入すると，

したがって，求める軌跡は ________________

演習 6　点 P が直線 $2x+y+1=0$ 上を動くとき，点 $A(3,\ 1)$ と点 P を結ぶ線分 AP を $2:1$ に内分する点 Q の軌跡を求めよ．

演習 7　点 P が円 $x^2+y^2=9$ 上を動くとき，2 点 $A(6,\ 1)$，$B(-3,\ 5)$ と P を頂点とする $\triangle ABP$ の重心 G の軌跡を求めよ．

4STEP $\boxed{209}$ をやっておくこと．

▷Point◁　軌跡の限界

図形的な条件やパラメータの条件がある場合，点 P の軌跡には「制限」(「限界」ともいう) が付くことがある．

軌跡に制限が r かどうか，その都度，考えるクセをつけること．

演習 8　点 P が円 $x^2+y^2=5$ 上を動くとき，2 点 $A(0,\ 3)$，$B(3,\ 0)$ と P を頂点とする $\triangle ABP$ の重心 G の軌跡を求めよ．

演習 9　2 点 $A(-3,\ 0)$，$B(2,\ 0)$ と P を頂点とする $\triangle ABP$ が，PA : PB $=3:2$ を満たしながら変化するとき，点 P の軌跡を求めよ．

演習 10　放物線 $y = x^2 + 2ax + a$ が x 軸と異なる 2 点で交わるように a の値が変化するとき，この放物線の頂点 P の軌跡を求めよ.

4STEP $\boxed{211}$ をやっておくこと.

13　曲線 $y=f(x)$ を境界とする領域 (教科書 p100〜p101，p107)

この章の目標

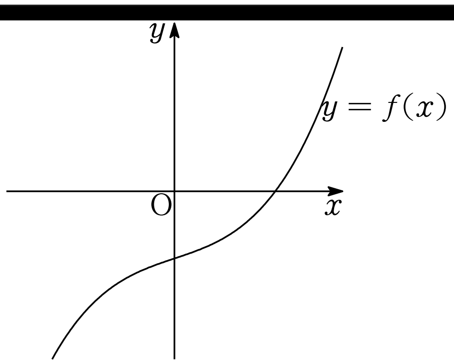
不等式を満たす点 $(x,\ y)$ を集めたものが領域であることを理解し，正確に図示できること.

▷Point◁　曲線 $y=f(x)$ を境界とする領域

座標平面上において，曲線 $y=f(x)$ を考えるとき，

- 不等式 $y<f(x)$ の表す領域は，曲線 $y=f(x)$ の ______________
- 不等式 $y>f(x)$ の表す領域は，曲線 $y=f(x)$ の ______________

また，$y \leqq f(x)$，，$y \geqq f(x)$ の表す領域は，それぞれ $y<f(x)$，$y>f(x)$ の表す領域に，**境界線を含めた**ものである.

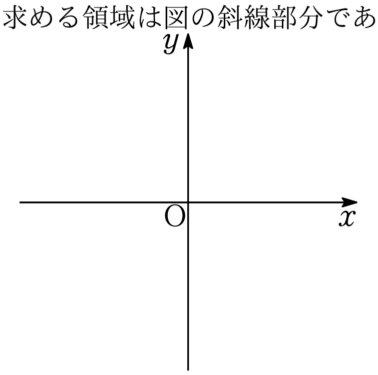


例題 5　次の不等式の表す領域を図示せよ.

(1) $y>2x-3$　　(2) $3x-2y-2 \leqq 0$

解

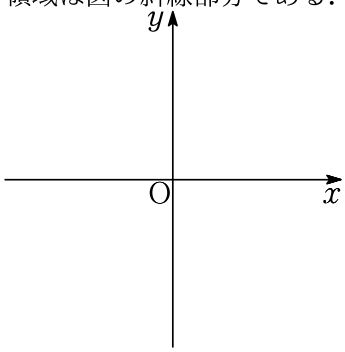
(1) 求める領域は図の斜線部分である.



ただし，__________________

(2) $3x-2y-2 \leqq 0 \iff$ ________________

求める領域は図の斜線部分である.



ただし，__________________

演習 11　次の不等式の表す領域を図示せよ.

(1) $y \leqq -x+1$

(2) $3x+y-2>0$

(3) $3x-4y \leqq -12$

(4) $y<2$

(5) $x \leqq 3$

(6) $y>x^2-4x+3$

4STEP $\boxed{219}$, $\boxed{225}$ をやっておくこと.

14　円を境界とする領域 (教科書 p102〜p103)

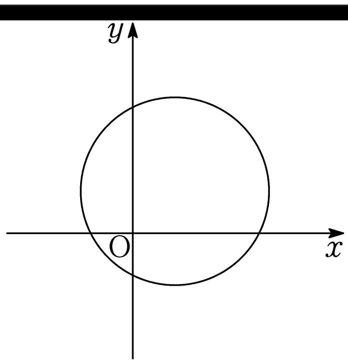
この章の目標　円の内部を外部を表す領域をしっかりと区別することができること．

▷Point◁　円を境界とする領域

座標平面上において，円 $C : (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を考えるとき，

- 不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ の表す領域は，円 C の ______________
- 不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ の表す領域は，円 C の ______________

また，$(x-a)^2+(y-b)^2 \leqq r^2$，$(x-a)^2+(y-b)^2 \geqq r^2$ の表す領域は，それぞれ $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$，$(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ の表す領域に，**境界線を含めた**ものである．

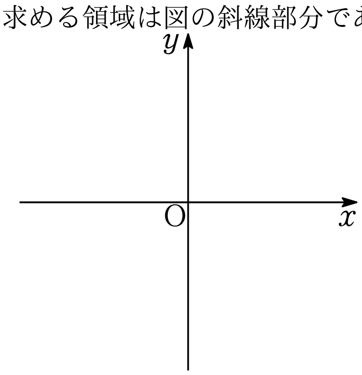


例 題 6　次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1) $(x+2)^2+y^2<1$　　(2) $x^2+y^2-2x-4y+1 \geqq 0$

解

(1) 求める領域は図の斜線部分である．

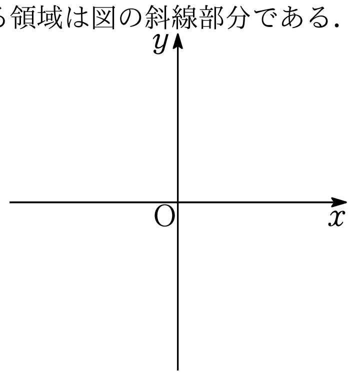


ただし，__________________

(2) $x^2+y^2-2x-4y+1 \geqq 0$

$\Longleftrightarrow$ ______________________

求める領域は図の斜線部分である．



ただし，__________________

演習 12　次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1) $x^2+y^2<1$

(2) $(x+1)^2+(y-2)^2>9$

(3) $x^2+y^2-6x-2y+9 \geqq 0$

(4) $x^2+y^2+4x-6y+1<0$

演習 13　中心が $(2,\ -3)$，半径が 5 の円の内部を表す不等式を作れ．ただし，境界線を含まないものとする．

4STEP $\boxed{220}$，$\boxed{221}$をやっておくこと．

15　連立不等式の表す領域 (教科書 p104)

この章の目標

連立不等式で表される領域や積の形で表現された不等式の領域を正確に図示できること．

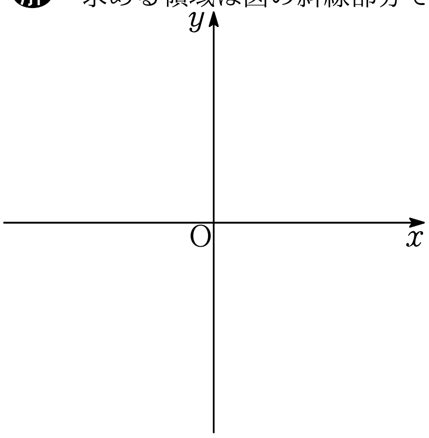
「連立不等式」とは，「複数の不等式を同時に満たす」ということなので，それぞれの不等式の表す領域の共通部分を考えることになります．

なお，境界線の交点の座標は必ず求めることにしよう．

例題 7　次の連立不等式の表す領域を図示せよ．

$$\begin{cases} x^2+y^2<25 \\ y<3x-5 \end{cases}$$

解　求める領域は図の斜線部分である．



ただし，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

演習 14　次の連立不等式の表す領域を図示せよ．

(1) $\begin{cases} x+y<3 \\ 2x-y<6 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (x-2)^2+y^2 \geqq 1 \\ x+2y \geqq 3 \end{cases}$

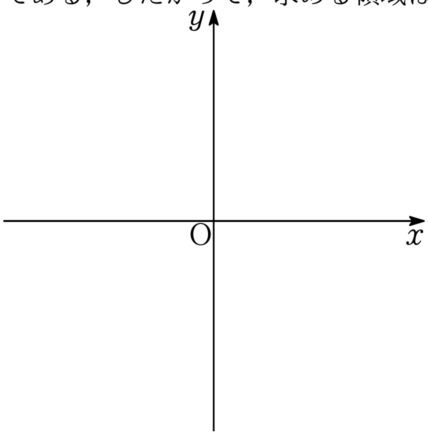
例 題 8　次の不等式の表す領域を図示せよ.

$$(x-y)(x+y-2)<0$$

解

まず，$(x-y)(x+y-2)<0 \iff$ または

である，したがって，求める領域は図の斜線部分である.



ただし，____________________

演習 15　次の不等式の表す領域を図示せよ.

$$(3x+4y-12)(x-2y+4)>0$$

4STEP $\boxed{223}$，$\boxed{224}$，$\boxed{226}$ をやっておくこと.

16　領域と最大最小 (教科書 p105)

この章の目標

領域の考え方を利用して，最大最小を調べる手法（いわゆる『線形計画法』）を学びます．多くの分野への応用が利く，重要な手法です．

▷Point◁ **領域における $f(x,\ y)$ の最大最小**

________________ とおいて，この図形を領域と共有点をもつように動かして考える．

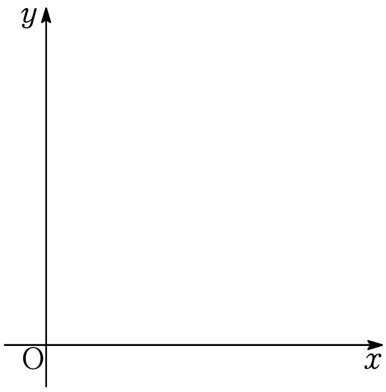
例題 9　x，y が次の 4 つの不等式

$$x \geqq 0,\qquad y \geqq 0,\qquad 2x+3y \leqq 12,\qquad 2x+y \leqq 8$$

を満たすとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ．

解　与えられた連立不等式の表す領域を D とすると，下図のようである．

ただし，____________



$x+y=$ ______ ……① とおく

これは，________________________ を表している．

この図形が，________________________　k の最大値と最小値を求めればよい．

図より，k の値は，

直線 ① が点 ________ を通るときに最大になり，点 ________ を通るときに最小になる．

したがって，

$(x,\ y)=$ __________ のとき，最大値 __________

$(x,\ y)=$ __________ のとき，最小値 __________

演習 16　x，y が次の 4 つの不等式

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad 3x + y \leqq 9, \quad x + 2y \leqq 8$$

を満たすとき，$2x + y$ の最大値と最小値を求めよ．

演習 17　x，y が次の 4 つの不等式

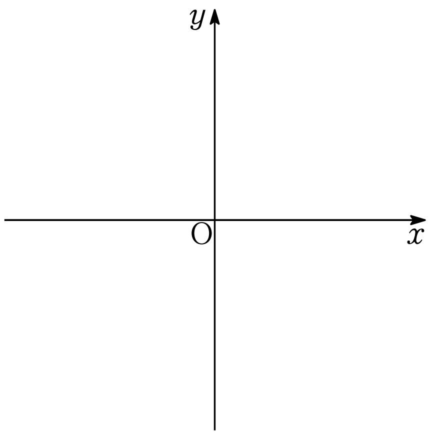
$$2x + y \geqq 0, \quad x + 2y \leqq 6, \quad 4x - y \leqq 6$$

を満たすとき，$x - y$ の最大値と最小値を求めよ．

4STEP $\boxed{229}$ をやっておくこと．

例 題 10　x，y が $x^2+y^2 \leqq 5$ を満たすとき，$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ．

解　与えられた連立不等式の表す領域を D とすると，下図のようである．
ただし，＿＿＿＿＿＿＿＿



$2x+y=$ ＿＿＿ ……①　とおく

これは，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ を表している．

この図形が，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　k の最大値と最小値を求めればよい．

ここで，直線 ① と円 $x^2+y^2=5$ が接するときを考える．

よって，接するのは $k=$ ＿＿＿＿＿ のときで，そのときの接点は (＿＿＿＿＿＿)

図より，k の値は，
直線 ① が点 ＿＿＿＿＿ で接するときに最大になり，点 ＿＿＿＿＿ をで接するときに最小になる．

したがって，
$(x,\ y)=$ ＿＿＿＿＿＿ のとき，最大値 ＿＿＿＿＿＿

$(x,\ y)=$ ＿＿＿＿＿＿ のとき，最小値 ＿＿＿＿＿＿

4STEP $\boxed{231}$ をやっておくこと．

例題 11　ある工場では製品 X，Y を製造している．
それらを製造するには原料 a，b が必要で，X，Y を 1kg 製造するために必要な原料の量と，原料の在庫量は右の表の通りである．また，X，Y 1kg あたりの利益は，それぞれ 1 万円，2 万円である．原料の在庫量の範囲で，最大の利益を得るには，X，Y をそれぞれ何 kg 製造すればよいか．

	原料 a	原料 b
X	10 kg	20 kg
Y	30 kg	20 kg
在庫	300 kg	400 kg

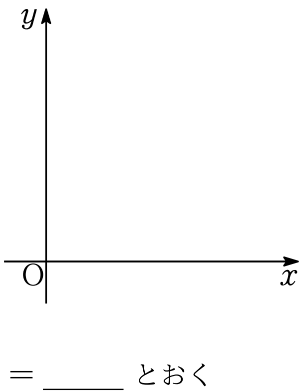
解　製品 X を x kg，製品 Y を y kg 製造するとする．
このとき，原料 a は，＿＿＿＿＿＿＿＿ k g，原料 b は，＿＿＿＿＿＿＿＿ k g使用することになり，利益は，＿＿＿＿＿＿＿＿ 円である．
原料 a の在庫は，＿＿＿＿＿ k g，原料 b の在庫は，＿＿＿＿＿ k gなので，

＿＿＿＿＿＿＿＿ ≦ ＿＿＿＿＿，　＿＿＿＿＿＿＿＿ ≦ ＿＿＿＿＿

また，製造量は 0 kg 以上なので，＿＿＿＿＿＿＿＿ ≧ 0，　＿＿＿＿＿＿＿＿ ≧ 0
以上の関係式をまとめると，

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

この範囲内で，＿＿＿＿＿＿＿＿ が最大になるときの $(x,\ y)$ を求めればよい．
与えられた連立不等式の表す領域を D とすると，下図のようである．
ただし，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿



＿＿＿＿＿ ＝ ＿＿＿ とおく
これは，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ を表している．
この図形が，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　k の最大値を求めればよい．
図より，k の値は，直線 ① が点 ＿＿＿＿＿ を通るときに最大になる．

よって，X を ＿＿＿＿＿ kg，Y を ＿＿＿＿＿ kg 製造すれば最大の利益を得ることになる．

4STEP $\boxed{230}$ をやっておくこと．

17　領域を利用した証明法 (教科書 p106)

この章の目標

命題 $P \Longrightarrow Q$ が真であるか，偽であるかを，領域の考え方を利用して判断する方法を学びます．

▷Point◁ **命題の真偽と領域の包含関係**

条件 p を満たすものの集合を P，条件 q を満たすものの集合を Q するとき，

「命題 $p \Longrightarrow q$ が真である」 $\Longleftrightarrow$ 「$P \subset Q$」

が成立する．

【例】　「4 の倍数ならば 2 の倍数である」　　「帝塚山高校生は高校生である」

例 題 12　次の命題の真偽を判定せよ．

$x^2 + y^2 < 1$ ならば $x^2 + y^2 + 2y - 3 < 0$

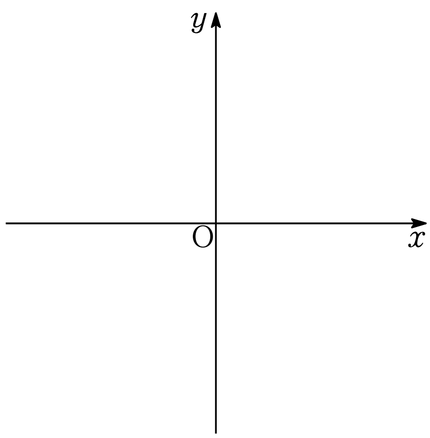
解　不等式 $x^2 + y^2 < 1$ の表す領域を P，不等式 $x^2 + y^2 + 2y - 3 < 0$ の表す領域を Q とする．

$x^2 + y^2 + 2y - 3 < 0$

$\Longleftrightarrow$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\Longleftrightarrow$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

なので，領域 P と Q を図示すると，右図のようになる．



したがって，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ であるので，もとの命題は ＿＿＿＿＿ である．

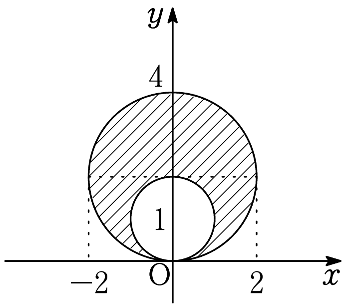
演習 18　次の命題の真偽を判定せよ．

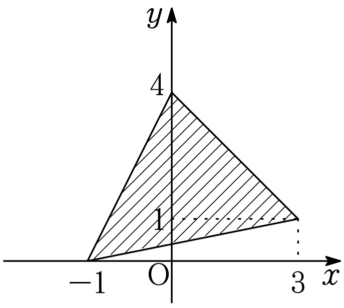
$x^2 + y^2 < 1$ ならば $x + y < \sqrt{2}$

4STEP $\boxed{232}$ をやっておくこと．

18　おまけ

演習 19 図の斜線部分はどのような不等式の表す領域か．ただし，境界線は含まないものとする．





4STEP $\boxed{222}$, $\boxed{227}$ をやっておくこと．