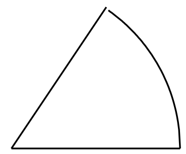
1　弧度法 (教科書 p112～p115)

これまで，角の大きさは，分度器などを使って測り，「～°(度)」と表現してきました．このような測定方法を「度数法」といい，これはこれで分かり易い方法だったのですが，これ以外の測定方法もあるので，紹介しよう．

▷Point◁　弧度法の定義

半径 1 の弧の長さが 1 であるような
扇形の中心角を ______________ と定める．
※　rad　:　______________



半径 1 の半円の周の長さは π なので，

$$180^\circ = \pi \ \ \text{rad}$$

となります．この対応が基本で，他にも例えば，

$$90^\circ = \qquad \text{rad}$$
$$60^\circ = \qquad \text{rad}$$ などなど

単なる比例関係です．なお，$1^\circ =$ __________ rad，　1 rad = __________° です．

ちなみに，1 rad は，約 ______________° です ($\pi = 3.14159.....$ だから)．

注　通常，弧度法における角の単位（rad）は省略します．よって，今後は，単に「$180^\circ = \pi$」などと書いていきます．

▷Point◁　弧度法と度数法の変換方法

度数法（°）　　　　弧度法（rad）

例 題 1　度数法を弧度法で，弧度法を度数法で表せ．

(1) 15°　　(2) 210°　　(3) $\dfrac{5}{4}\pi$　　(4) $\dfrac{5}{12}\pi$

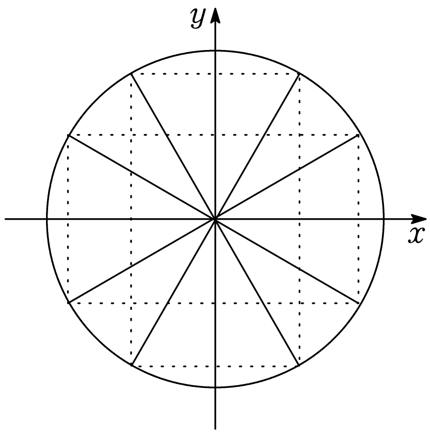
4STEP　241，242 をやっておくこと．

さしあたり，これから登場するのは以下の有名角だけです.

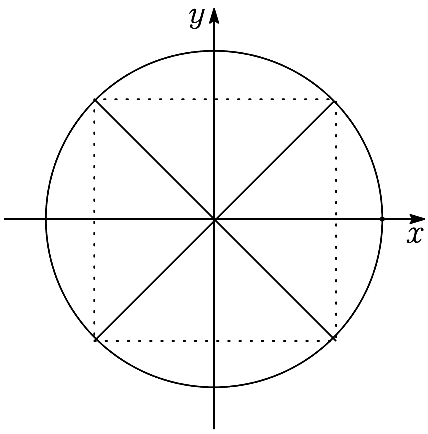
例 題 2　0° から 180° までの有名角を弧度法で表せ.

度数法	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
弧度法									

ケーキカットのイメージ



$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{6}$ シリーズ



$\dfrac{\pi}{4}$ シリーズ

例 題 3　180° から 360° までの有名角を弧度法で表せ.

度数法	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
弧度法									

▷Point◁

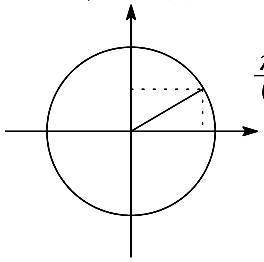
弧度法をいちいち度数法に直すのではなく，弧度法のままで使っていく.
もう度数法は使わない．これから弧度法一筋でいくことにする.

これまで角度の大きさといえば，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ でしたが，そんなカタイこと言わずに，思い切って角度の範囲を取っ払ってみましょう．一般的に角度を扱うために，次のルールに従います．

▷Point◁　$\boxed{\text{一般角の表し方}}$

単位円上で角の大きさは「矢印」で表示する．
反時計周りが正の角，時計周りが負の角を表す．

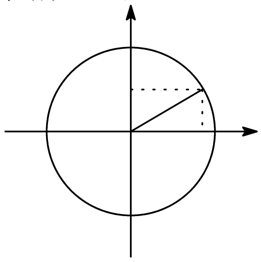
つまり，下の図だけでは，何ラジアンなのか分からないのです．



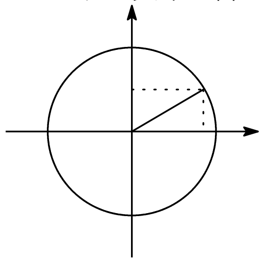
$\dfrac{\pi}{6}$ の場所にあるにはあるが・・・・

矢印のつけ方によって，角度の大きさが変わってくるからです．

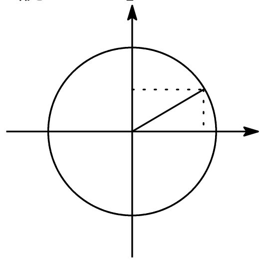
区別をつけるために「矢印」で表記するのです．矢印を書くことで，角度を「読みとる」ことができます．



$\theta = \dfrac{\pi}{6}$



$\theta = \dfrac{13}{6}\pi$



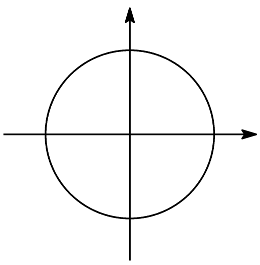
$\theta = -\dfrac{11}{6}\pi$

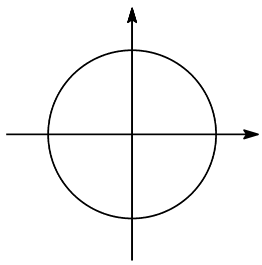
このように，$\dfrac{\pi}{6}$ と $\dfrac{13}{6}\pi$ と $-\dfrac{11}{6}\pi$ は値はそれぞれ異なりますが，単位円上では同じ位置にあります．

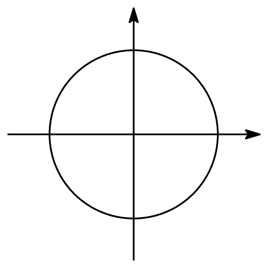
なぜなら，$\dfrac{13}{6}\pi = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi$，$-\dfrac{11}{6}\pi = \dfrac{\pi}{6} - 2\pi$ だからです．1 回転が 2π なので 2π だけズレると同じ位置になるのです．なので，最初の図だと，$\dfrac{\pi}{6}$ なのか $\dfrac{13}{6}\pi$ なのか $-\dfrac{11}{6}\pi$ なのか区別がつきません．

例題 4　次の角を図示せよ．

(1) $\theta = \dfrac{5}{4}\pi$　　(2) $\theta = \dfrac{7}{3}\pi$　　(3) $\theta = -\dfrac{5}{6}\pi$







4STEP　$\boxed{243}$ をやっておくこと．

弧度法を用いる利点は「数学 Ⅲ」の微積分で実感できるので，今の時点ではあんまりメリットを感じないかも知れません．あえてメリットを言うなら，扇形の弧の長さや面積が簡単に計算できることぐらいですね (この公式も「数学 Ⅲ」で再び登場するので今はスルーしてもかまいません)．

▷Point◁

半径 r，中心角 θ の扇形の弧の長さを l，面積を S とすると，

$l =$　　　　　　$S =$

である．

演習 1　上の公式を証明 (説明) せよ．

例題 5　半径が 4，中心角 $\dfrac{\pi}{5}$ である扇形の弧の長さと面積を求めよ．

演習 2　半径が 6，中心角 $\dfrac{5}{6}\pi$ である扇形の弧の長さと面積を求めよ．

4STEP　$\boxed{244}$，$\boxed{246}$ をやっておくこと．

2　三角関数 (教科書 p116〜p117)

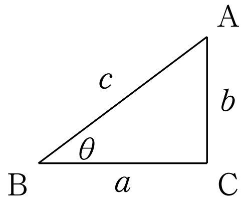
そもそも，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ とは，次のように定義されました．

▷Point◁ 定義 ①

右のような直角三角形において，

$\sin\theta =$　　　　$\cos\theta =$　　　　$\tan\theta =$

と定める．



しかし，これだと，不具合が生じます．例えば，$\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ となる直角三角形がたくさんできてしまうのです．そこで，統一するために，**斜辺の長さを 1 と決めます．**

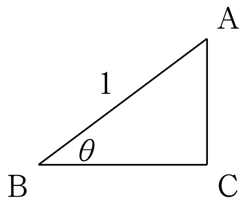
そうすると，$\sin\theta$，$\cos\theta$ が次のように定義されます．

▷Point◁ 定義 ②

右のような斜辺の長さが 1 の直角三角形において，

AC の長さを_________，BC の長さを_________

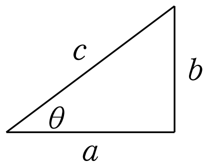
と定める．



しかし，これでもまだ不具合が生じます．$\theta = 0$ や $\theta = \dfrac{\pi}{2}$（弧度法ですよ！）などの場合が，まったく意味をなさないのです．そこで，**切り抜いて座標平面に乗っけます．**

つまり，次のような流れで，定義を拡張していったわけです．

▷Point◁ 定義の変容

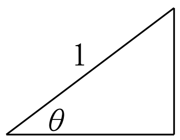


$\sin\theta =$

$\cos\theta =$

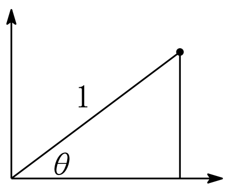
$\sin\theta$，$\cos\theta$ とは __________ である．

↓ $c = 1$ と決めることによって



$\sin\theta$，$\cos\theta$ とは __________ である．

↓ 座標平面上に乗っけることによって

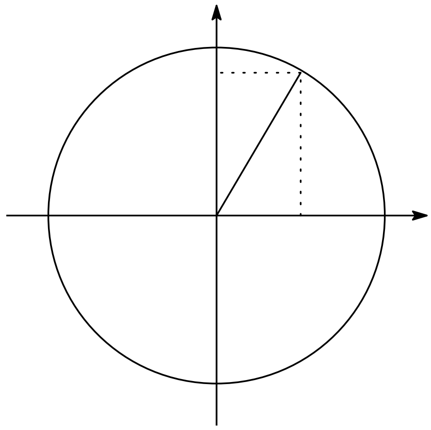


$\sin\theta$，$\cos\theta$ とは __________ である．

$\sin\theta$ や $\cos\theta$ を最終的に「座標」で定義するによって，どんな場合にも対応できるのでした．
したがって，次の定義を Final とします．

▷Point◁ $\boxed{\sin\theta\ \text{と}\ \cos\theta\ \text{の定義 (Final)}}$

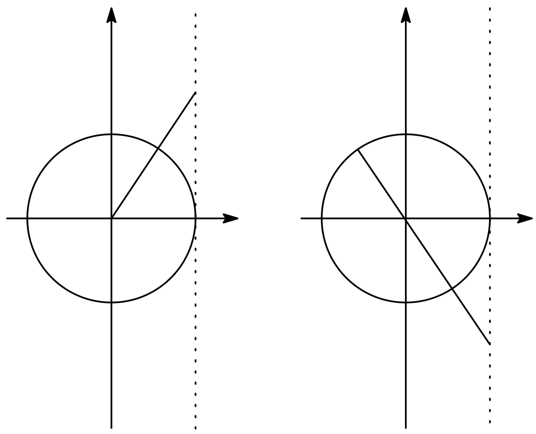
半径 1 の円周上に点 P をとる．
点 P の x 軸の正の向きとのなす角を θ とする．
このとき，P$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ である．つまり，
点 P の x 座標が $\cos\theta$,
点 P の y 座標が $\sin\theta$
である．



また，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，つまり，$\tan\theta$ とは ________________ のことなので，$\tan\theta$ の定義は次のようになります．

▷Point◁ $\boxed{\tan\theta\ \text{の定義 (Final)}}$

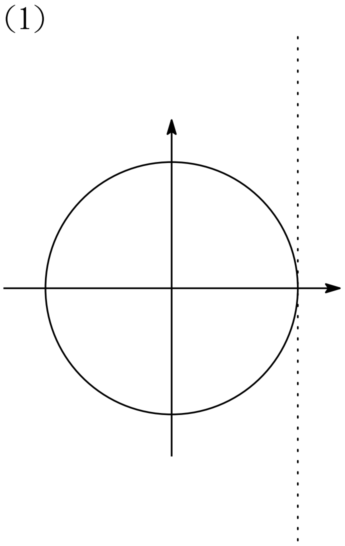
半径 1 の円周上に点 P をとる．
点 P の x 軸の正の向きとのなす角を θ とする．
このとき，点 P と原点を結ぶ直線を引き，
その直線が直線 $x = 1$ と交わる点を T とする．
点 T の y 座標が $\tan\theta$ である．



例題 6　θ が次の値のときに，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を求めよ．

(1) $\theta = \dfrac{4}{3}\pi$　　(2) $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$

(1)

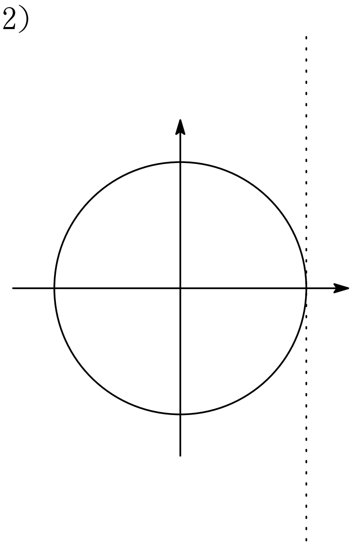


$\sin\theta =$

$\cos\theta =$

$\tan\theta =$

(2)



$\sin\theta =$

$\cos\theta =$

$\tan\theta =$

3　単位円ルーレット (教科書 p129〜p131)

半径 1 の円を単位円といいます．単位円上を反時計回りにグルグルと点が回っている様子をイメージしてください．

反時計周りが正の角，時計周りが負の角です．また，単位円ルーレットは何回転しても OK．例えば，$\dfrac{\pi}{6}$ と $\dfrac{13}{6}\pi$ と $-\dfrac{11}{6}\pi$ は値はそれぞれ異なりますが，単位円上では同じ位置にあります．なぜなら，$\dfrac{13}{6}\pi=\dfrac{\pi}{6}+2\pi$，$-\dfrac{11}{6}\pi=\dfrac{\pi}{6}-2\pi$ だからです．1 回転が 2π なので 2π だけズレると同じ位置になるのです．

したがって，$\sin\dfrac{\pi}{6}=\sin\dfrac{13}{6}\pi=\sin\left(-\dfrac{11}{6}\pi\right)=\dfrac{1}{2}$ とすべて等しくなります．同様に，cos の値もすべて等しくなります．

なお，tan は π だけずれると同じ位置になります．

例題 7　単位円ルーレットを見ながら，下の表を完成させよ．

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\theta$																	
$\cos\theta$																	
$\tan\theta$																	

三角関数を理解するための第一歩は，まずは右の図をしっかりとイメージして，例えば，

「$\sin\dfrac{3}{4}\pi$ の値は？」と聞かれたら「$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ です」

「$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}\,(0\leqq\theta<2\pi)$ を満たす θ は？」と聞かれたら「$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ と $\dfrac{4}{3}\pi$ です」

と即答できるようになることです．これが基本中の基本．

$\cos\theta$ の値は x 座標，$\sin\theta$ の値は y 座標で表され，特別な値については

$$-1,\quad -\frac{\sqrt{3}}{2},\quad -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad -\frac{1}{2},\quad 0,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{\sqrt{3}}{2},\quad 1$$

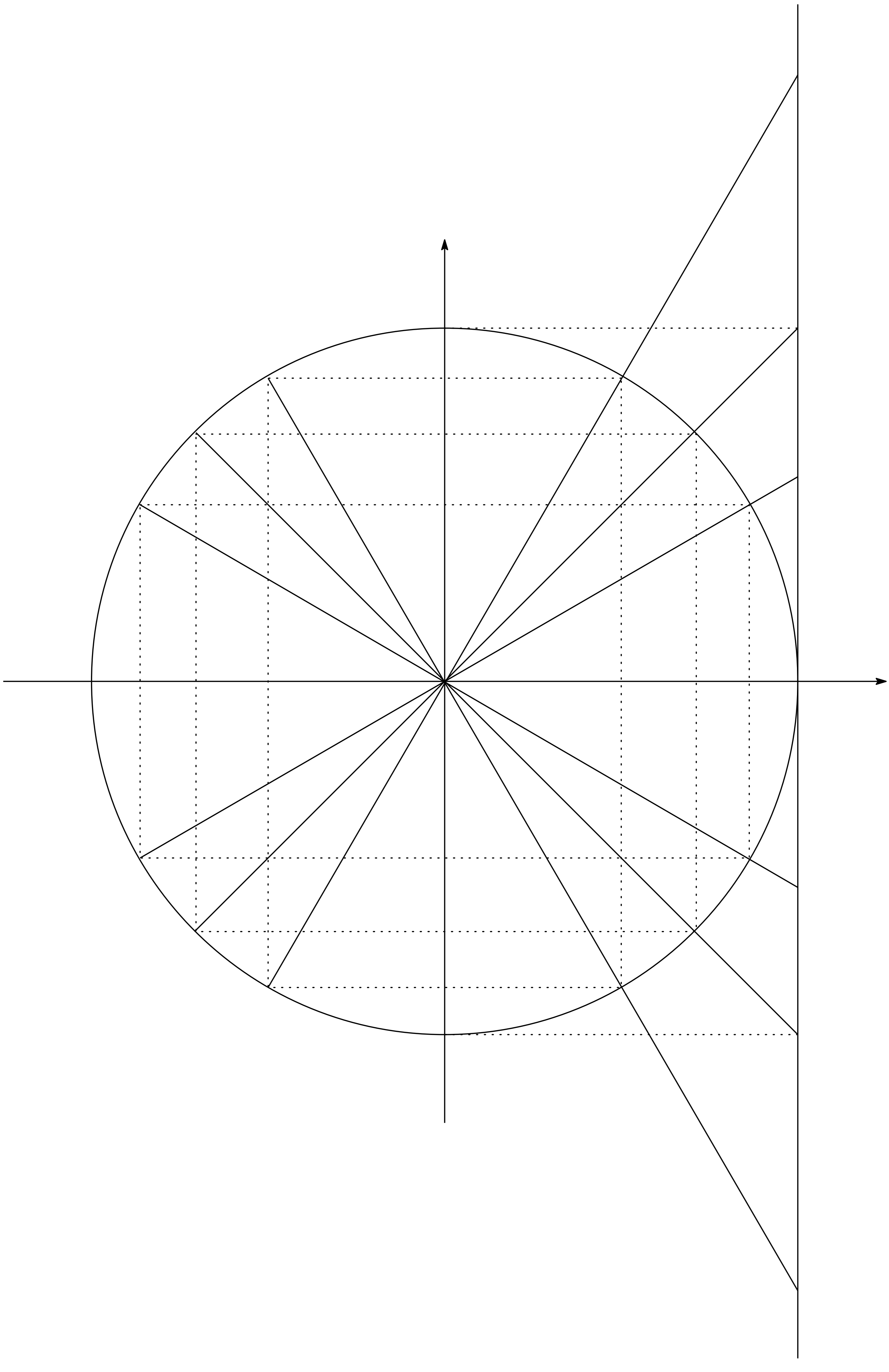
と並んでいます．$\tan\theta$ の値は $x=1$ 上の点の y 座標で表され，特別な値については

$$-\sqrt{3},\quad -1,\quad -\frac{1}{\sqrt{3}},\quad 0,\quad \frac{1}{\sqrt{3}},\quad 1,\quad \sqrt{3}$$

と並んでいます．大小関係や位置をしっかり頭に焼き付けておこう．

▷Point◁

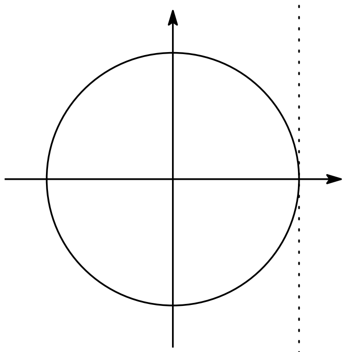
三角関数の値を丸暗記するのではなく，単位円ルーレットをイメージして，その都度その場で考えることが重要．登場する値はほぼ決まっているので，経験を重ねるうちに早く正確にイメージできるようになる．意味も考えずに丸暗記するのだけは絶対にダメです．



与えられた角の三角関数の値を求めることは基本中の基本です．まずは，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めます．$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ なので，$\tan\theta$ の値もわかりますが，いちおう単位円ルーレットで確認しておこう．

演習 3　次の角 θ について，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(1) $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$

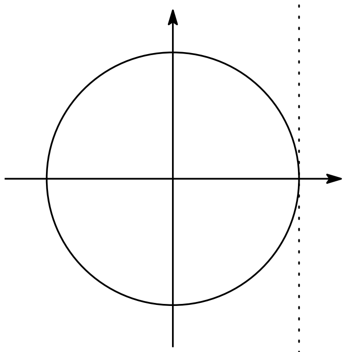


$\sin\theta =$

$\cos\theta =$

$\tan\theta =$

(2) $\theta = \dfrac{11}{6}\pi$

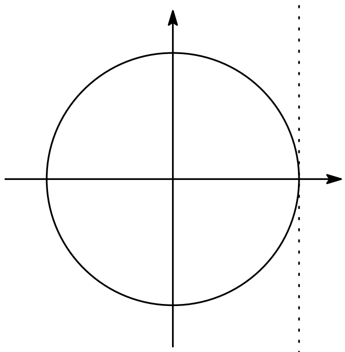


$\sin\theta =$

$\cos\theta =$

$\tan\theta =$

(3) $\theta = \dfrac{7}{4}\pi$

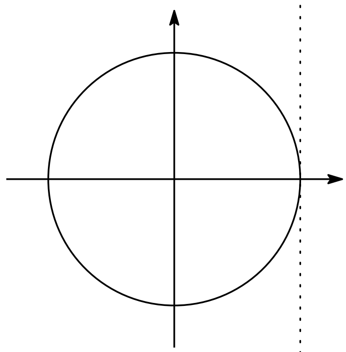


$\sin\theta =$

$\cos\theta =$

$\tan\theta =$

(4) $\theta = -\dfrac{5}{3}\pi$

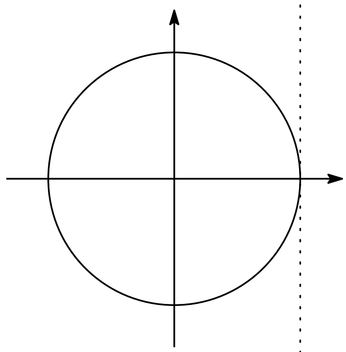


$\sin\theta =$

$\cos\theta =$

$\tan\theta =$

(5) $\theta = -\dfrac{5}{6}\pi$

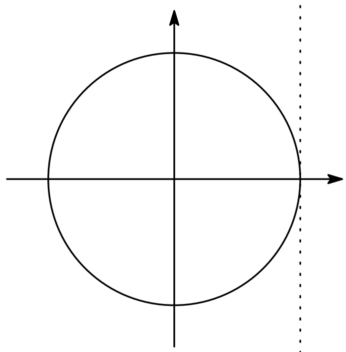


$\sin\theta =$

$\cos\theta =$

$\tan\theta =$

(6) $\theta = -\dfrac{3}{4}\pi$

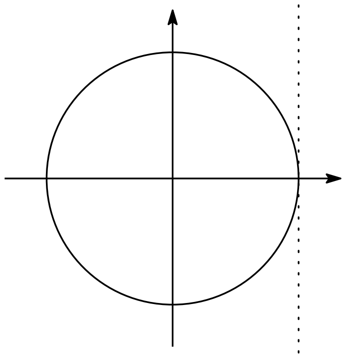


$\sin\theta =$

$\cos\theta =$

$\tan\theta =$

(7) $\theta = \dfrac{19}{3}\pi$

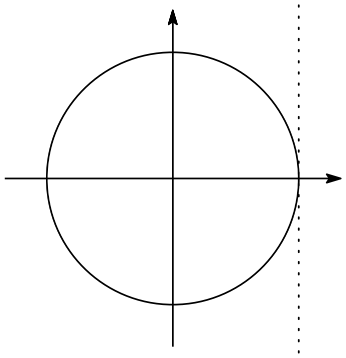


$\sin\theta =$

$\cos\theta =$

$\tan\theta =$

(10) $\theta = \dfrac{5}{2}\pi$

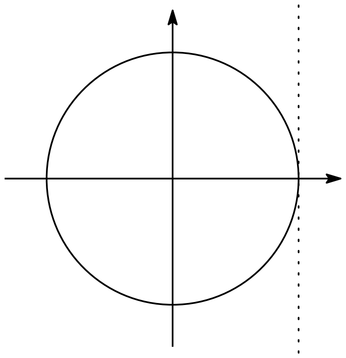


$\sin\theta =$

$\cos\theta =$

$\tan\theta =$

(8) $\theta = -\dfrac{25}{6}\pi$

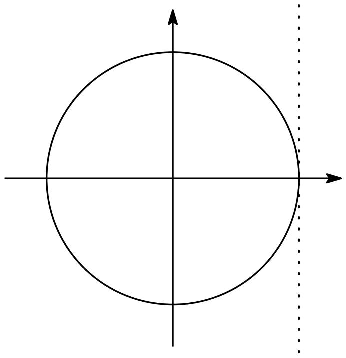


$\sin\theta =$

$\cos\theta =$

$\tan\theta =$

(11) $\theta = -\dfrac{9}{2}\pi$

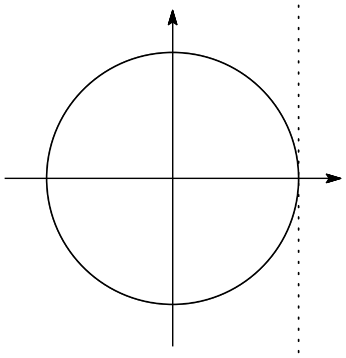


$\sin\theta =$

$\cos\theta =$

$\tan\theta =$

(9) $\theta = \dfrac{17}{4}\pi$

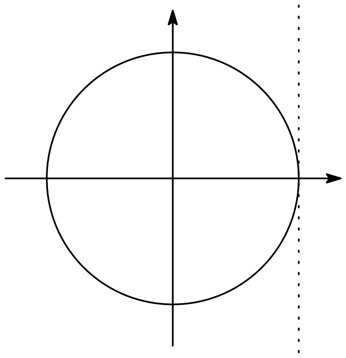


$\sin\theta =$

$\cos\theta =$

$\tan\theta =$

(12) $\theta = 3\pi$



$\sin\theta =$

$\cos\theta =$

$\tan\theta =$

4STEP　$\boxed{248}$, $\boxed{249}$, $\boxed{261}$ をやっておくこと.

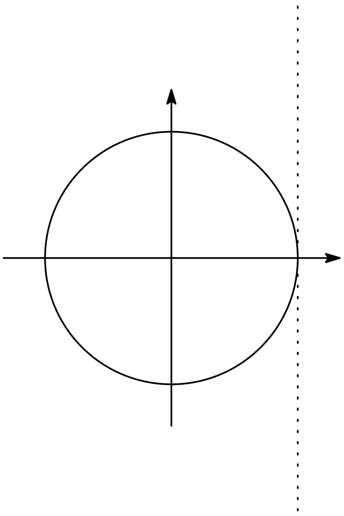
なお, $\boxed{261}$ は「鋭角の三角関数で表し」の部分を無視して，ただ単に値を求めるだけでよい.

これまで，与えられた角度 θ に対して，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めてきましたが，今度は逆に，三角関数の値から，角度を求めてみよう．

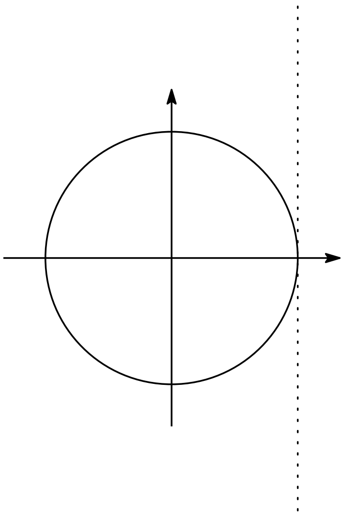
▷Point◁
常に，単位円ルーレットを頭にイメージして考えること．

例 題 8　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け．また，θ の範囲に制限がないときの解を求めよ．

(1) $\sqrt{2}\sin\theta + 1 = 0$　　(2) $\tan\theta = \sqrt{3}$



$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，
$\theta =$
θ の範囲に制限がないとき
$\theta =$



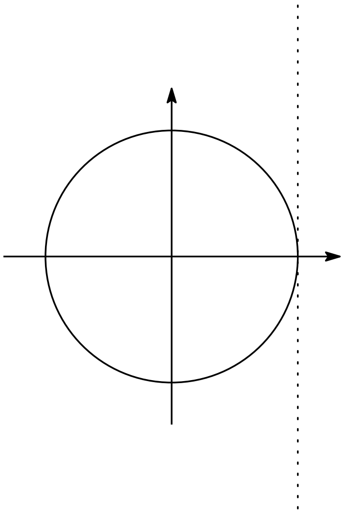
$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，
$\theta =$
θ の範囲に制限がないとき
$\theta =$

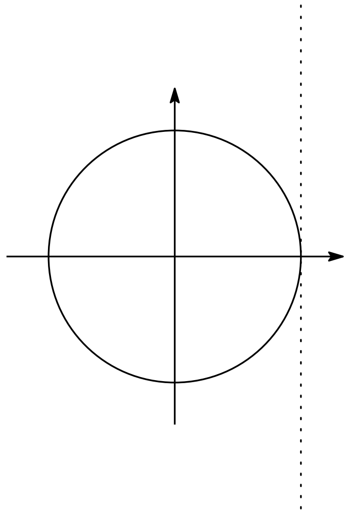
演習 4　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け．また，θ の範囲に制限がないときの解を求めよ．

(1) $2\sin\theta - 1 = 0$　　(2) $2\cos\theta + \sqrt{3} = 0$　　(3) $\tan\theta = 1$

例 題 9　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け．

(1) $\cos\theta > \dfrac{1}{2}$　　　　(2) $\tan\theta < \sqrt{3}$





演習 5　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け．

(1) $2\sin\theta < -\sqrt{3}$　　　　(2) $\sqrt{2}\cos\theta - 1 \geqq 0$　　　　(2) $\tan\theta \geqq 1$

4STEP　$\boxed{271}$, $\boxed{272}$, $\boxed{273}$ をやっておくこと．

▷Point◁　※超重要

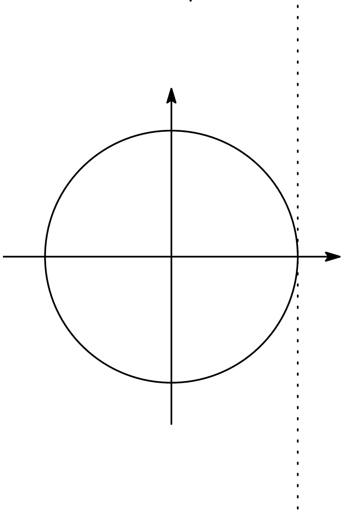
角を置き換えて考える．そのとき，置き換えた角の範囲に注意する．
常に，角度の範囲を意識するクセをつけること．

例題 10　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け．

(1) $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2) $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

解　$\theta + \dfrac{\pi}{3} = A$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，________________

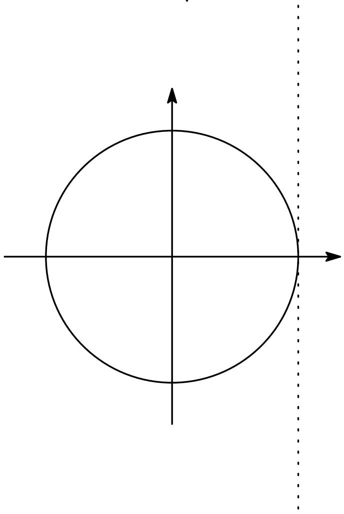
(1) $\sin A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$



よって，$A =$ ________________

したがって，$\theta =$ ________________

(2) $\sin A \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$



よって，A の範囲は，________________

したがって，θ の範囲は，________________

演習 6　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け．

(1) $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$　(2) $\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(3) $\tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$

演習 7　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け．

(1) $\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) \geqq \dfrac{1}{2}$　(3) $\tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) > \sqrt{3}$

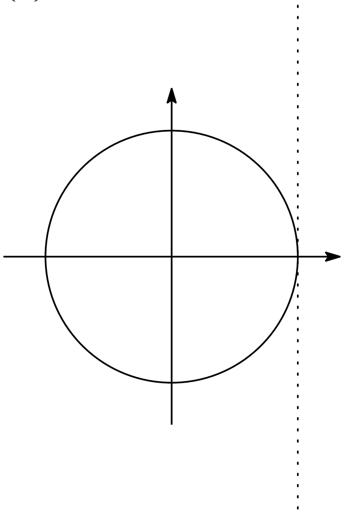
4STEP　$\boxed{274}$, $\boxed{275}$ をやっておくこと．

例 題 11　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け．

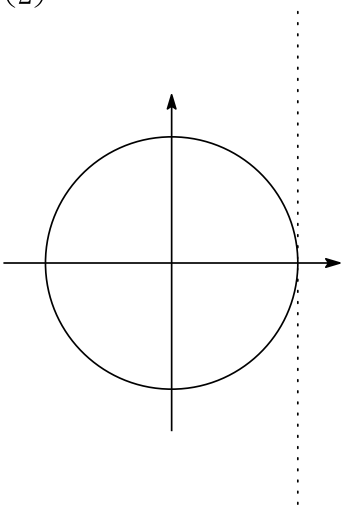
(1) $\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$　　(2) $\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \geqq \dfrac{1}{2}$

解　$2\theta - \dfrac{\pi}{3} = A$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(1)



(2)



演習 8　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け．

(1) $\cos\left(2\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\cos\left(2\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4STEP　$\boxed{276}$ をやっておくこと．

4　三角関数の還元公式 (教科書 p120〜p122)

「三角関数の還元公式」とは以下の関係式の総称です．

▷Point◁ 三角関数の還元公式

$$\begin{cases}\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta\\ \cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta\\ \tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(-\theta)=-\sin\theta\\ \cos(-\theta)=\cos\theta\\ \tan(-\theta)=-\tan\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta\\ \cos(\theta+\pi)=-\cos\theta\\ \tan(\theta+\pi)=\tan\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(\pi-\theta)=\sin\theta\\ \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta\\ \tan(\pi-\theta)=-\tan\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta\\ \cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta\\ \tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta\\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta\\ \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{\tan\theta}\end{cases}$$

これらの公式をみて，「はい，わかりました。覚えておきま〜す」といえる人は少ない (ていうか、いない) と思います．実際，この僕でさえも覚えてません (ハハハ・・・)．こんなにたくさん覚えられるはずがないです．絶対に無理です．じゃあ，どうするのかと言うと・・・・・

▷Point◁ 三角関数の還元公式の覚え方

実際に単位円を書いてその都度その場で考えるしかない．
sin は＿＿＿＿＿座標の値，cos は＿＿＿＿＿座標の値，が基本中の基本．

✎注　各々，sin，cos，tan の 3 つがありますが，sin と cos が分かれば，tan は自動的に出てきます．$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ なので，$\tan\theta$ は，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の組合せで分かるからです．

例えば，$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$，$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$ が分かれば，

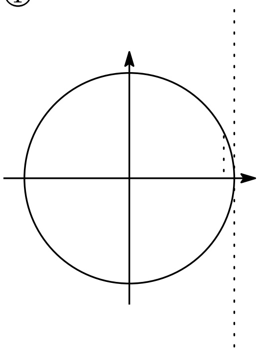
$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\frac{1}{\tan\theta}$$

と導き出せます．なので，$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$ であることを暗記する必要はありません．

次の 例 題 を通して，還元公式を導いてみよう．この考え方に馴染めない人は還元公式を丸暗記するしかありませんね．僕は暗記するのが苦手なので，絶対に「単位円でその都度考える」派です．

例 題 12　単位円を使って，還元公式を導き出せ．

①

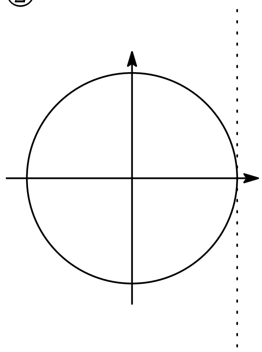


$\sin(\theta + 2n\pi) =$

$\cos(\theta + 2n\pi) =$

$\tan(\theta + 2n\pi) =$

②

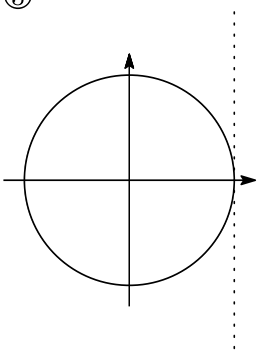


$\sin(-\theta) =$

$\cos(-\theta) =$

$\tan(-\theta) =$

③

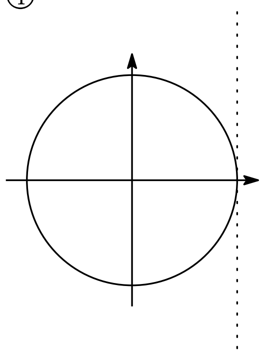


$\sin(\theta + \pi) =$

$\cos(\theta + \pi) =$

$\tan(\theta + \pi) =$

④

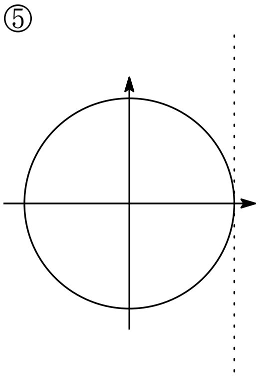


$\sin(\pi - \theta) =$

$\cos(\pi - \theta) =$

$\tan(\pi - \theta) =$

⑤

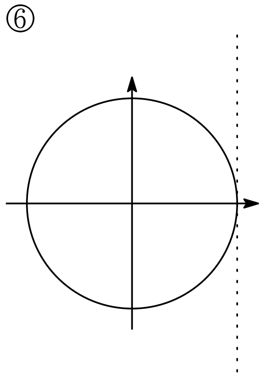


$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) =$

$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) =$

$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) =$

⑥



$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$

例 題 13

(1) $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$, $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$ もついでに調べよ．

(2) $\sin(\theta-\pi)$, $\cos(\theta-\pi)$, $\tan(\theta-\pi)$ もついでに調べよ．

演習 9　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\theta+\pi)+\sin\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)+\sin(\theta+2\pi)$ を簡単にせよ．

4STEP　$\boxed{262}$ をやっておくこと．

参考　「単位円を使ってその都度考えよ」と言われても，なかなかスッとはできないと思います．そこで**裏ワザ**を教えます．実は，もうすぐ『加法定理』という重要な公式を学習します．加法定理はメチャクチャ重要な公式で，絶対に絶対に暗記せねばなりません．

加法定理とは次のような公式です (他にもあります)．

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

この公式を使えば還元公式を簡単に導くことができます．例えば，$\sin\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)$ の場合，上の加法定理の公式において，$\alpha=\theta$, $\beta=\frac{3}{2}\pi$ とすると，

$$\begin{aligned}\sin\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)&=\sin\theta\cos\frac{3}{2}\pi+\cos\theta\sin\frac{3}{2}\pi\\&=\sin\theta\times0+\cos\theta\times(-1)\\&=-\cos\theta\end{aligned}$$

と**機械的**に算出することができます ($\cos\frac{3}{2}\pi=0$ や $\sin\frac{3}{2}\pi=-1$ などの値は即答できるでしょうね)．どうせ「加法定理」は絶対に暗記せねばならないんだから，この加法定理だけから還元公式をすべて作り出すことができるという点で，この方法は有効だと思います．

5　三角関数の相互関係 (教科書 p118〜p119)

次の 3 つの関係式は，三角関数の学習においては常識です．

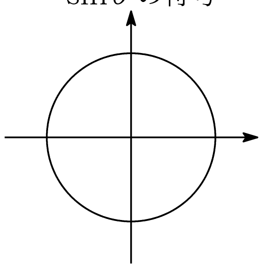
▷Point◁ 三角関数の相互関係 ※超重要

①　　　　②　　　　③

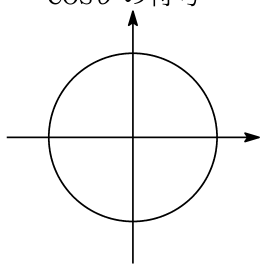
$\sin\theta$ は ________ 座標，$\cos\theta$ は ________ 座標の値であり，$\tan\theta =$ 　　　　　　 なので，θ の位置が決まれば，符号も決定します．

▷Point◁ 三角関数の符号 ※超重要

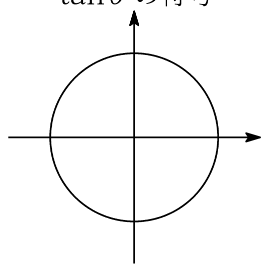
$\sin\theta$ の符号



$\cos\theta$ の符号



$\tan\theta$ の符号



例 題 14　θ の動径が第 4 象限にあり，$\cos\theta = \dfrac{5}{13}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．

解　θ の動径が第 4 象限にあるので，$\sin\theta$______，$\cos\theta$______，$\tan\theta$______．

演習 10　$\tan\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ．

4STEP　$\boxed{250}$, $\boxed{251}$ をやっておくこと．

例 題 15　次の等式を証明せよ

(1) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 2$　　(2) $\tan^2\theta + (1 - \tan^4\theta)\cos^2\theta = 1$

演習 11　次の等式を証明せよ

(1) $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$　　(2) $\dfrac{\tan\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\sin\theta}{\tan\theta} = \sin\theta\tan\theta$

4STEP　$\boxed{252}$, $\boxed{254}$, $\boxed{255}$ をやっておくこと.

例 題 16　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき, $\sin\theta\cos\theta$, $\sin^3\theta + \cos^3\theta$ の値を求めよ.

4STEP　$\boxed{253}$, $\boxed{256}$ やっておくこと.

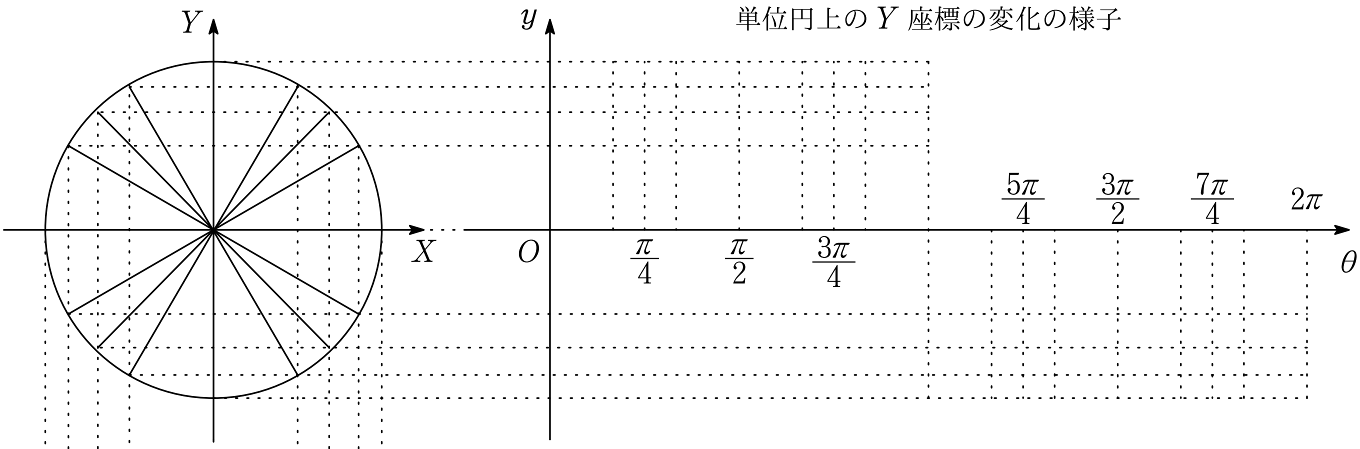
6　三角関数のグラフ (教科書 p123〜p128)

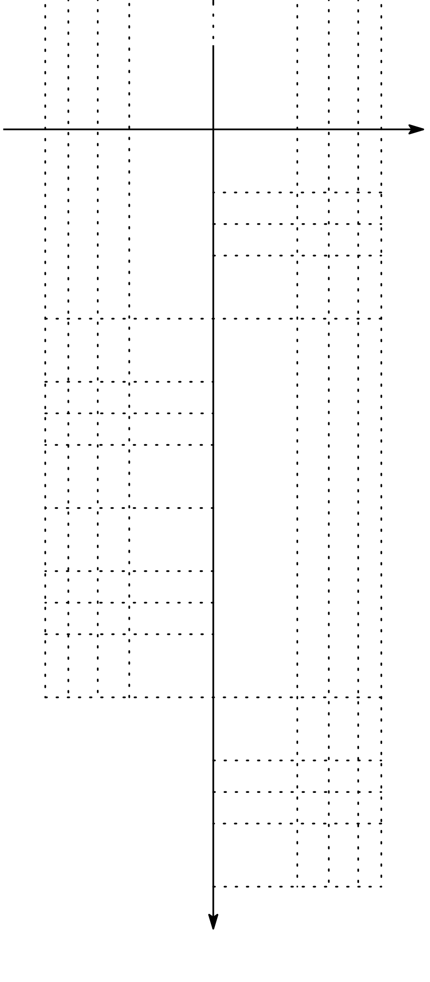
まずは，右ページの $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の表を埋めてみよう．表からもわかるように，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の θ に値を代入すると，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値がきちんと（一通りに）定まります．このことから $\sin\theta$ と $\cos\theta$ は θ についての関数と考えることができます．

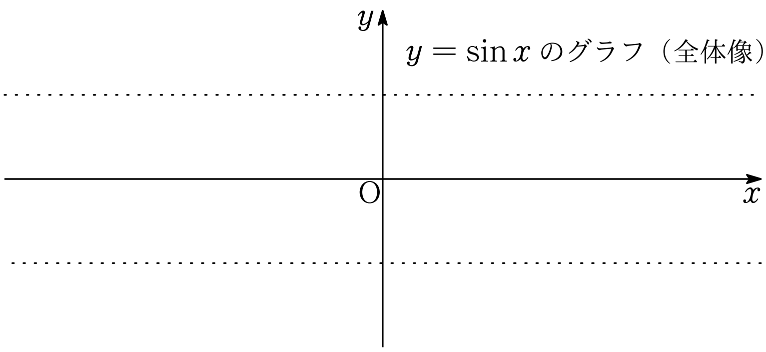
$\tan\theta$ の場合は，θ にどんな値を代入しても $\tan\theta$ の値がきちんと定まるかというとそうではなくヤバイ箇所がありますが，そのヤバイ箇所を除いてちゃんと θ についての関数になっています．

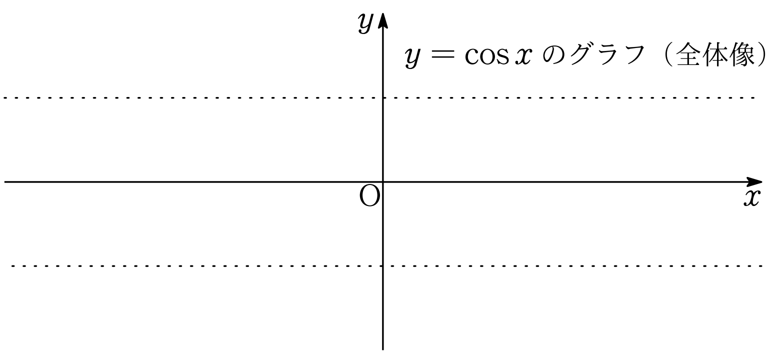
そこで、横軸を θ，縦軸を y として，三角関数 $y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$，$y=\tan\theta$ のグラフを考えてみよう．これらの表の数値を下のグラフに点を取っていこう．そのような曲線ができるでしょうか．

6.1　$y=\sin\theta$ と $y=\cos\theta$ のグラフ







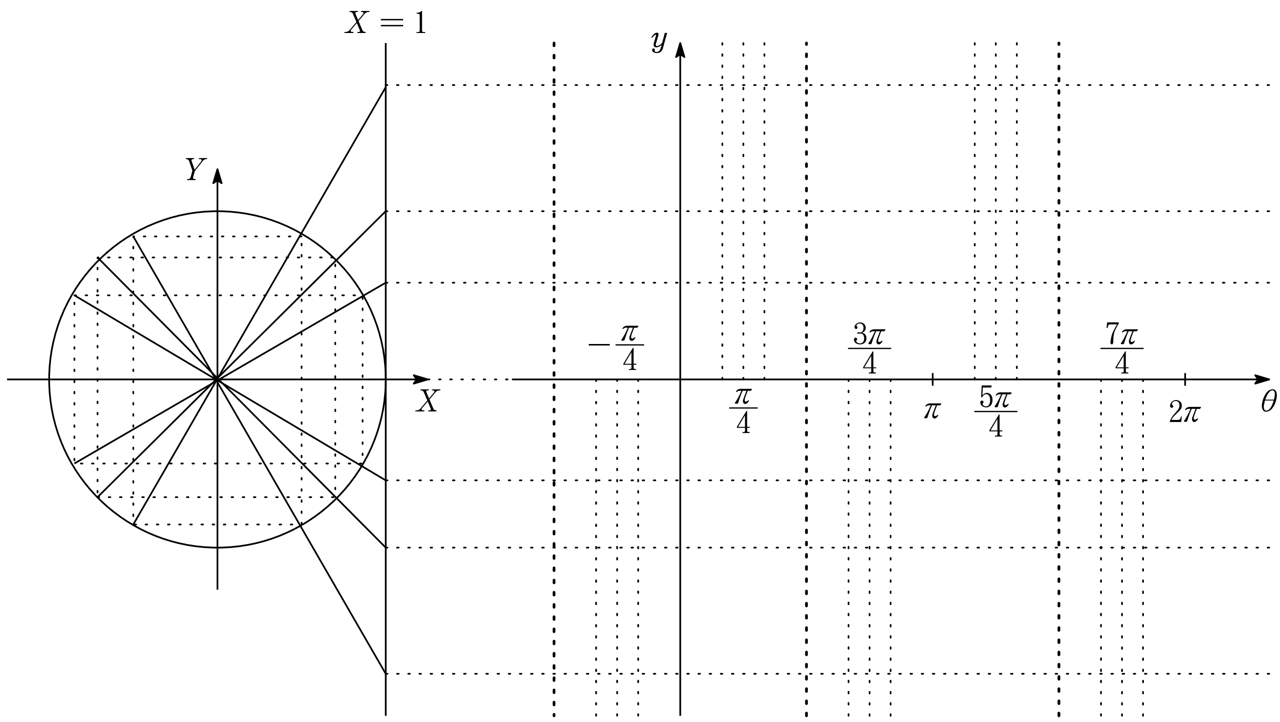


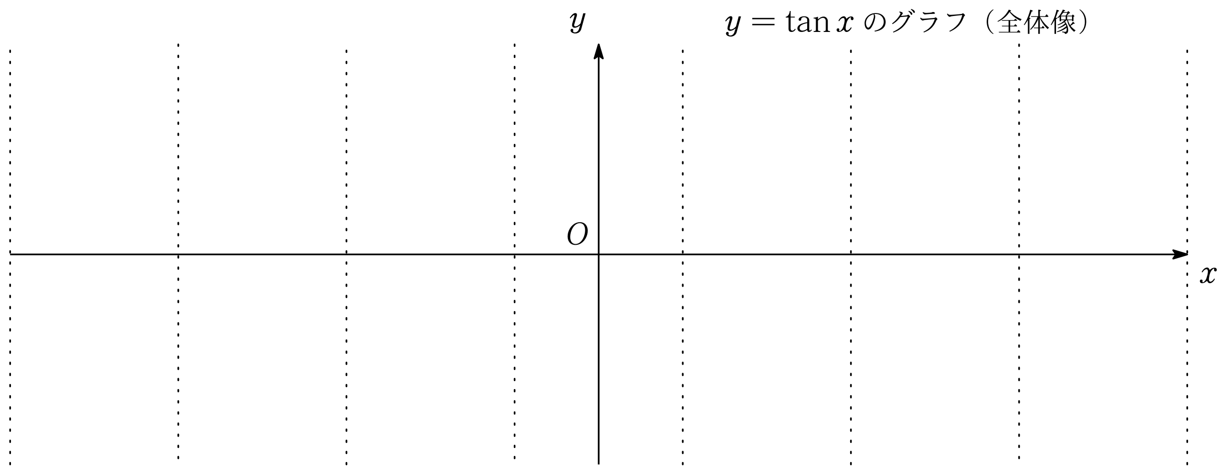
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\theta$																	
増減																	

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos\theta$																	
増減																	

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\tan\theta$																	
増減																	

6.2　$y = \tan\theta$ のグラフ





基本となる $y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$，$y=\tan\theta$ のグラフの概形，周期，振幅などをまとめておこう．

▷Point◁ 三角関数のグラフの特徴 ※超重要

	$y=\sin\theta$	$y=\cos\theta$	$y=\tan\theta$
グラフの概形			
周期			
グラフの形状			
θ			
y			

参考 $y=\sin\theta$ や $y=\cos\theta$ が表す曲線を「サインカーブ」といいます．身近にあるサインカーブの例を探してみよう．

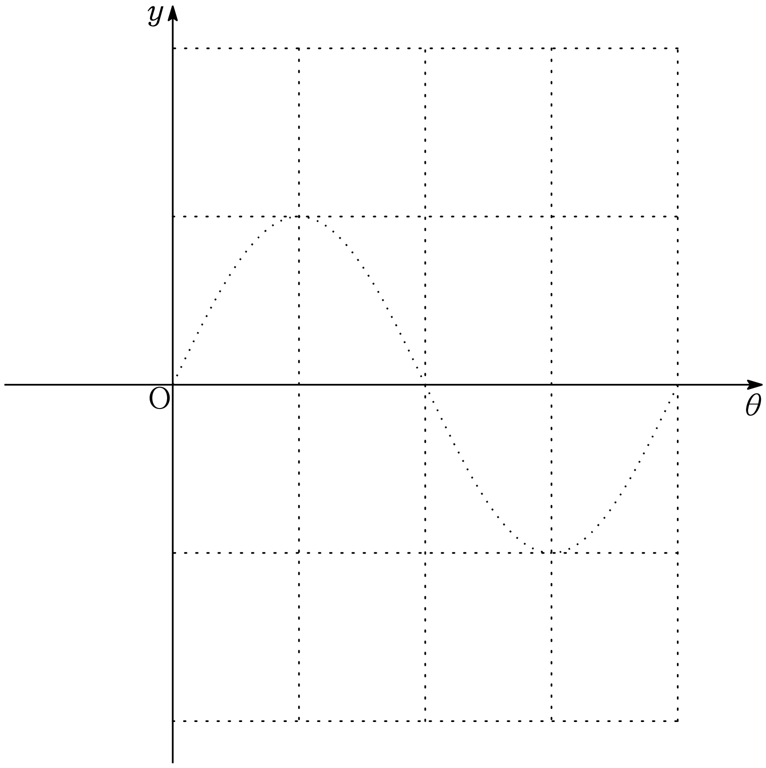
4STEP 264 をやっておくこと．

$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$，$y=\tan\theta$ のグラフは基本形として絶対に覚えておかねばならないグラフです．今回は，このグラフに少し手を加えて，より変化に富んだグラフを描いてみよう．

6.3　グラフの伸縮

$\boxed{\text{例 題}}$ 17　下の表を埋めて，$y=2\sin\theta$ のグラフを図示せよ．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$	$\cdots$	2π
$\sin\theta$									
$2\sin\theta$									

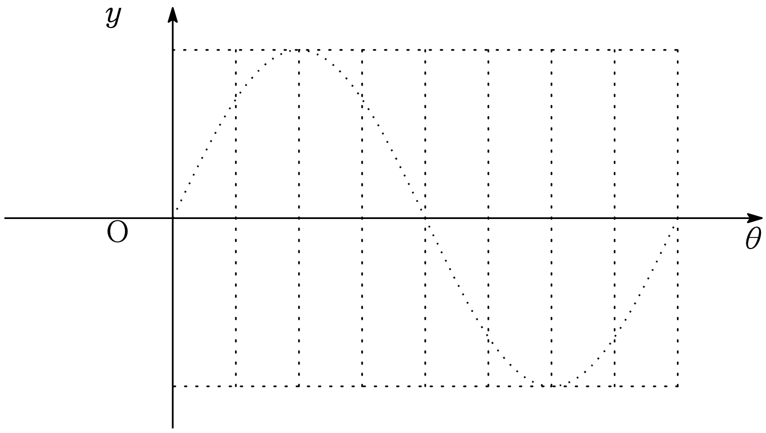


上のグラフから，次のことが分かります．

▷Point◁
$y=2\sin\theta$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを，________ に ______________ したもの．

例 題 18　下の表を埋めて，$y = 2\sin\theta$ のグラフを図示せよ．

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$\sin\theta$									
2θ									
$\sin 2\theta$									



上のグラフから，次のことが分かります．

▷Point◁
$y = \sin 2\theta$ のグラフは，$y = \sin\theta$ のグラフを，________ に ______________ したもの．

以上をまとめると次のようになります．

▷Point◁　三角関数のグラフの伸縮 ※超重要

	伸縮の方向	グラフの概形	周期	振幅
$y = a\sin\theta$ $(a > 0)$				
$y = \sin k\theta$ $(k > 0)$				

▷Point◁ $\boxed{y = a\sin k\theta \text{ のグラフ}}$ ※超重要

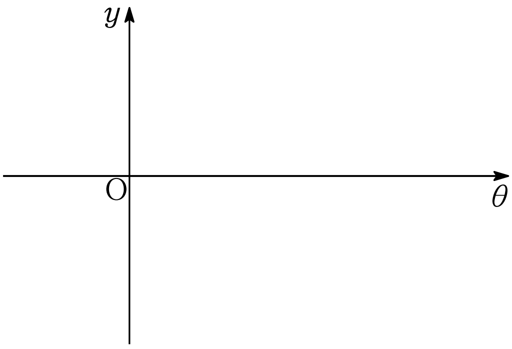
基本となるグラフは何か，それを上下左右どのように伸縮したものなのか，を考える．

演習 12　次の三角関数のグラフを書け．x 切片，y 切片も明記し，最低 1 周期分は書くこと．

(1) $y = \dfrac{1}{2}\sin\theta$

________ のグラフを

______ に ______ 倍 ______ したもの．

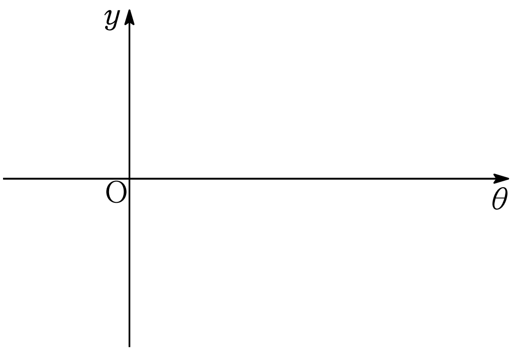


周期は ________，振幅は ________

(2) $y = -2\cos\theta$

________ のグラフを

______ に ______ 倍 ______ したもの．

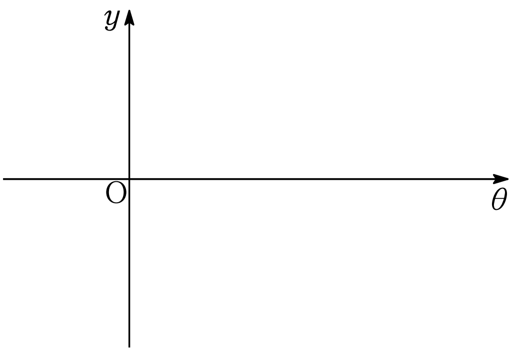


周期は ________，振幅は ________

(3) $y = \sin 3\theta$

________ のグラフを

______ に ______ 倍 ______ したもの．

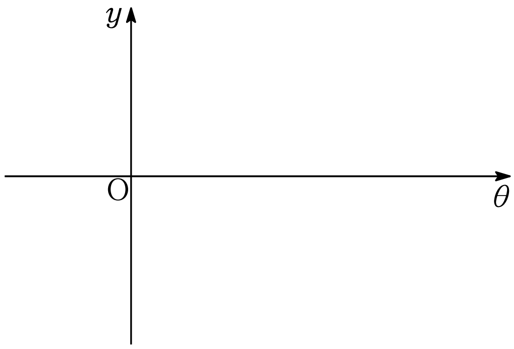


周期は ________，振幅は ________

(4) $y = \cos\dfrac{\theta}{2}$

________ のグラフを

______ に ______ 倍 ______ したもの．

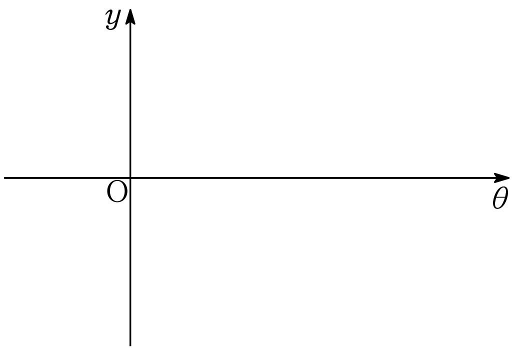


周期は ________，振幅は ________

(5) $y = 3\sin 4\theta$

________ のグラフを

______ に ______ 倍 ______ したもの．

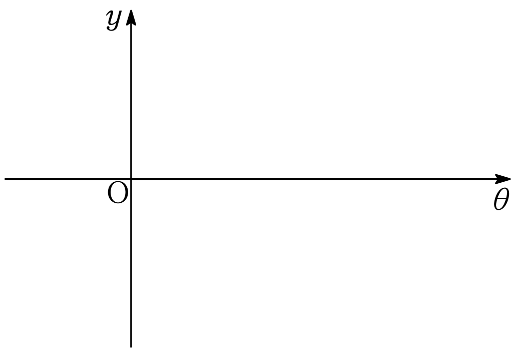


周期は ________，振幅は ________

(6) $y = \tan\dfrac{\theta}{2}$

________ のグラフを

______ に ______ 倍 ______ したもの．



周期は ________，振幅は ________

6.4　グラフの平行移動

▷Point◁　グラフの平行移動 ※超重要

$y = f(x)$ のグラフを，x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動したグラフは

____

である．

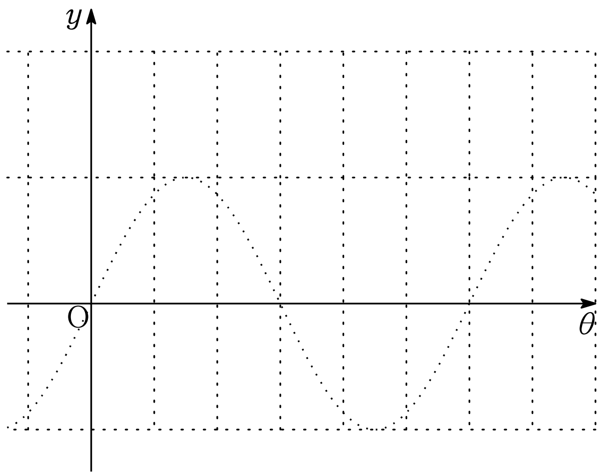
演習 13 上の事実を証明せよ．

例 題 19　次の関数のグラフをかけ．

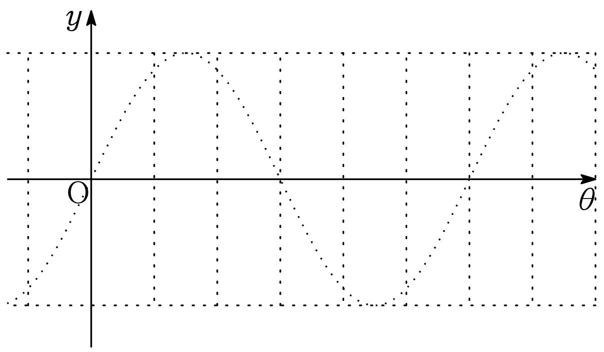
(1) $y = \sin\theta + 1$　　(2) $y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$

解

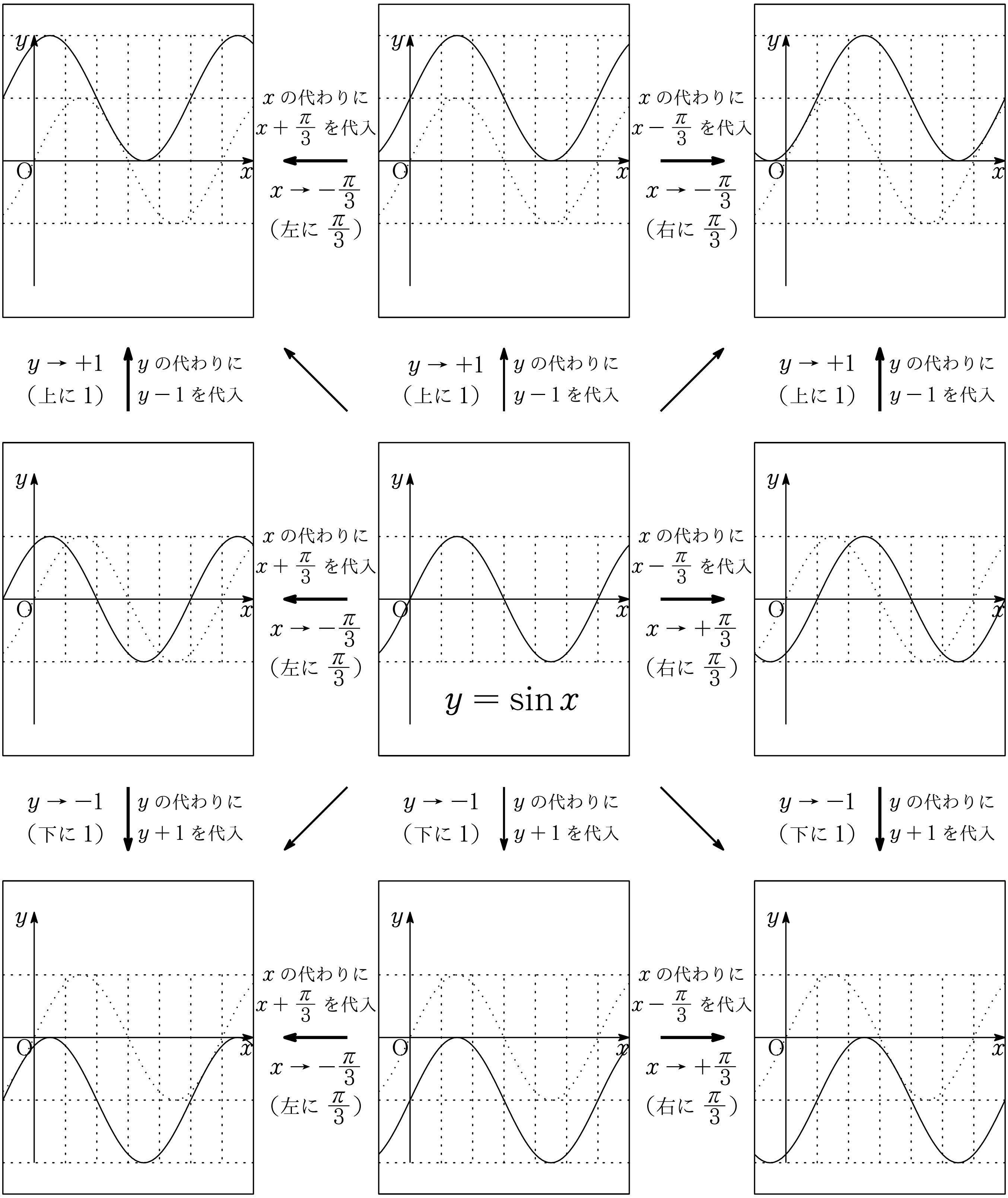
(1)　この関数のグラフは，$y = \sin\theta$ のグラフを ________ 軸方向に ____________ 平行移動したものである．



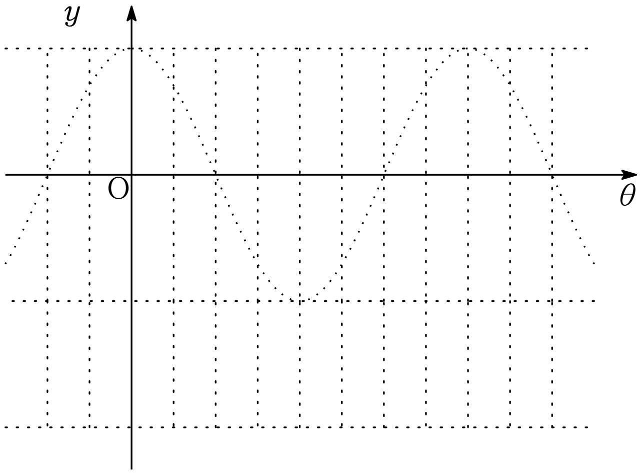
(2)　この関数のグラフは，$y = \sin\theta$ のグラフを ________ 軸方向に ____________ 平行移動したものである．



演習 14　下の図は，$y = \sin x$ のグラフを上下左右ナナメに移動させたものである．それぞれのグラフの下に，式を書き込め．

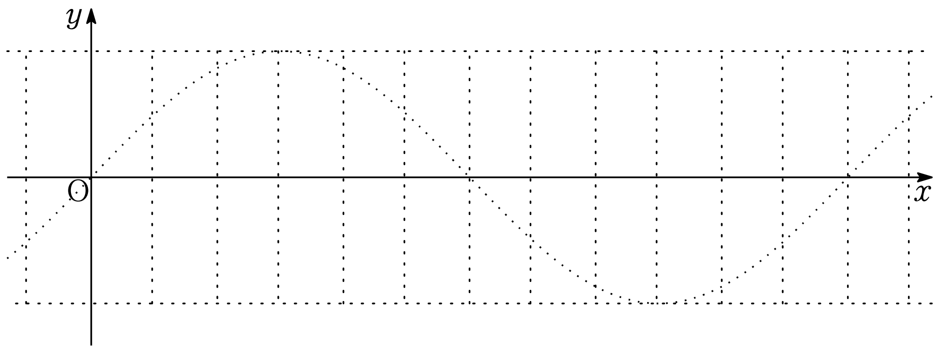


演習 15　$y=\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)-1$ のグラフを書け.



例 題 20　$y=\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフを書け.

解　$y=\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=$ 　　　　　　　　　　　より,
この関数のグラフは, $y=\sin 2\theta$ のグラフを θ 軸方向に ＿＿＿＿＿ 平行移動したものである. なお, $y=\sin 2\theta$ のグラフは, $y=\sin\theta$ のグラフを ＿＿＿＿ に ＿＿＿ 倍 ＿＿＿＿ したものである.



演習 16　$y=2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフを書け.

注　この問題は, $y=\cos\theta$ のグラフをどのように変化させたものか, 言葉で説明するだけでよい. グラフの形は, 青チャートの基本例題 134(p201) に載っているので, 各自で見ておくこと.

4STEP　$\boxed{265}$, $\boxed{266}$, $\boxed{267}$, $\boxed{270}$ をやっておくこと.

7　加法定理 (教科書 p134〜p138)

三角関数の加法定理とは次のようなものです．

▷Point◁ sin の加法定理

公式 S1　$\sin(\alpha+\beta)=$

公式 S2　$\sin(\alpha-\beta)=$

▷Point◁ cos の加法定理

公式 C1　$\cos(\alpha+\beta)=$

公式 C2　$\cos(\alpha-\beta)=$

▷Point◁ tan の加法定理

公式 T1　$\tan(\alpha+\beta)=$

公式 T2　$\tan(\alpha-\beta)=$

三角関数の加法定理は，高校数学全分野の中で，ベスト 3 に入る重要な公式です．文系理系関係なく，絶対に覚えておかねばなりません．

この公式を使えば，いろいろな角の三角比の値を計算することができます．

$\sin 75^\circ$
$=\sin(30^\circ+45^\circ)$
$=$

$\cos 105^\circ$
$=$

$\tan 15^\circ$
$=$

4STEP $\boxed{281}$ をやっておくこと．

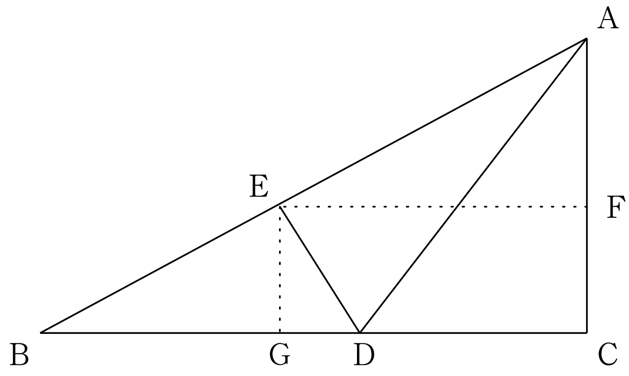
例 題 21　下の図を利用して

公式 $S1$　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

公式 $C1$　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

を証明せよ.

解　下の図で $\angle\mathrm{ABC}=\alpha$, $\angle\mathrm{DAB}=\beta$, $\mathrm{AD}=1$ とする.



$\triangle\mathrm{ADC}$ において, $\angle\mathrm{ADC}=\alpha+\beta$, $\mathrm{AD}=1$ より,

$\mathrm{AC}=$ ＿＿＿＿＿＿＿ $\cdots$ ①

$\mathrm{CD}=$ ＿＿＿＿＿＿＿ $\cdots$ ②

$\triangle\mathrm{ADE}$ において, $\angle\mathrm{DAE}=\beta$, $\mathrm{AD}=1$ より,

$\mathrm{AE}=$ ＿＿＿＿＿＿＿　$\mathrm{DE}=$ ＿＿＿＿＿＿＿

$\triangle\mathrm{AEF}$ において, $\angle\mathrm{AEF}=\alpha$, $\mathrm{AE}=\cos\beta$ より,

$\mathrm{AF}=$ ＿＿＿＿＿＿＿ $=$ ＿＿＿＿＿＿＿ $\cdots$ ③

$\mathrm{EF}=$ ＿＿＿＿＿＿＿ $=$ ＿＿＿＿＿＿＿ $\cdots$ ④

$\triangle\mathrm{DEG}$ において, $\angle\mathrm{DEG}=\alpha$, $\mathrm{DE}=\sin\beta$ より,

$\mathrm{EG}=$ ＿＿＿＿＿＿＿ $=$ ＿＿＿＿＿＿＿ $\cdots$ ⑤

$\mathrm{GD}=$ ＿＿＿＿＿＿＿ $=$ ＿＿＿＿＿＿＿ $\cdots$ ⑥

ここで, $\mathrm{AC}=\mathrm{AF}+\mathrm{FC}=\mathrm{AF}+\mathrm{EG}$ なので, ①, ③, ⑤ より,

＿＿＿＿＿＿＿ $=$ ＿＿＿＿＿＿＿ $+$ ＿＿＿＿＿＿＿

ここで, $\mathrm{CD}=\mathrm{GC}-\mathrm{GD}=\mathrm{EF}-\mathrm{GD}$ なので, ②, ④, ⑥ より,

＿＿＿＿＿＿＿ $=$ ＿＿＿＿＿＿＿ $-$ ＿＿＿＿＿＿＿

参考 ちょっと昔の話ですが，次の問題が東京大学で出題され受験業界で衝撃が走りました．

東京大学 (1999 年前期理系第 1 問)

(1) 一般角 θ に対して，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の定義を述べよ．

(2) (1) で述べた定義にもとづき，一般角 α，β に対して，

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ．

なんと，加法定理の証明が東大理系数学の第 1 問として出題されたのです (確か配点は 120 点満点中の 20 点)．確かに基本問題ではありますが，大半の受験生の出鼻を挫く問題として，それなりの威力があったであろうと推測できます．僕でもビビリます．

(1) で $\sin\theta$，$\cos\theta$ の定義を述べさせた上で証明させているあたりが東京大学らしい品格を感じます．というのも，$\sin\theta$，$\cos\theta$ をどう定義するのかによって証明方法が変わってくるからです．

一般に，$\sin\theta$，$\cos\theta$ は単位円上の座標として定義されます．ということは，先ほど紹介した図形を用いた証明は (確かにわかりやすい証明ではありますが) 定義に従っていないのでルール違反です．

では，どうするのか．そんなときは教科書を見よう．単位円の定義に基づく (正式な) 証明が教科書に載っているので各自で勝手に見といてください．

演習 17　上で紹介した東大の入試問題を解け．

注　これは自由課題です．各自で解いて，模範解答も調べて，確認しておいてください．

例 題 22　公式 $S1$，公式 $C1$ を利用して

公式 $S2$　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

公式 $C2$　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

を証明せよ．

例 題 23　$\boxed{\text{公式 } S1}$, $\boxed{\text{公式 } S2}$, $\boxed{\text{公式 } C1}$, $\boxed{\text{公式 } C2}$, を利用して

$\boxed{\text{公式 } T1}$ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\boxed{\text{公式 } T2}$ $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

を証明せよ.

以上で，加法定理のすべての証明が終わりました.

これから，加法定理をどんどん使っていきますので，確実に暗記しておいてください．メチャクチャ重要です.

例 題 24　$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\cos\beta=\dfrac{12}{13}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ.

解　$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，

演習 18　$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$, とする．$\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$, $\sin\beta = \dfrac{4}{5}$ のとき，$\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ．

演習 19　$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, とする．$\tan\alpha = 2$, $\tan\beta = 3$ のとき，次の値を求めよ．

(1) $\tan(\alpha+\beta)$

(2) $\alpha+\beta$

演習 20　$\sin\alpha + \sin\beta = \dfrac{1}{2}$，$\cos\alpha + \cos\beta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos(\alpha - \beta)$ の値を求めよ．

演習 21　上の問題でもし「$\cos(\alpha + \beta)$ の値を求めよ．」と問われたら，どうするか？単に符号が変わるだけだが，意外と難問で，これまでの知識だけでは解くことができない．三角関数の学習がすべて終わってから，挑戦してみよう．

4STEP　$\boxed{282}$，$\boxed{285}$，$\boxed{286}$，$\boxed{287}$，$\boxed{289}$ をやっておくこと．

8　加法定理の応用 (教科書 p138〜p142)

8.1　2 直線のなす角

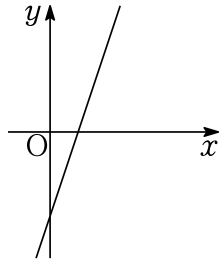
まず，「直線の傾き」と「三角関数」には次のような関係があります．

▷Point◁

直線 $y=mx+n$ と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると

$$m=$$

が成立する．

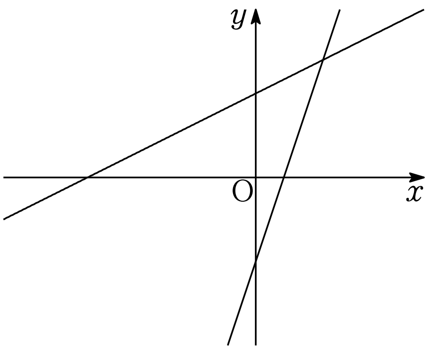


2 直線が交わっているとき，そのなす角を求めることができます．

そもそもまず，「2 直線のなす角」とは，

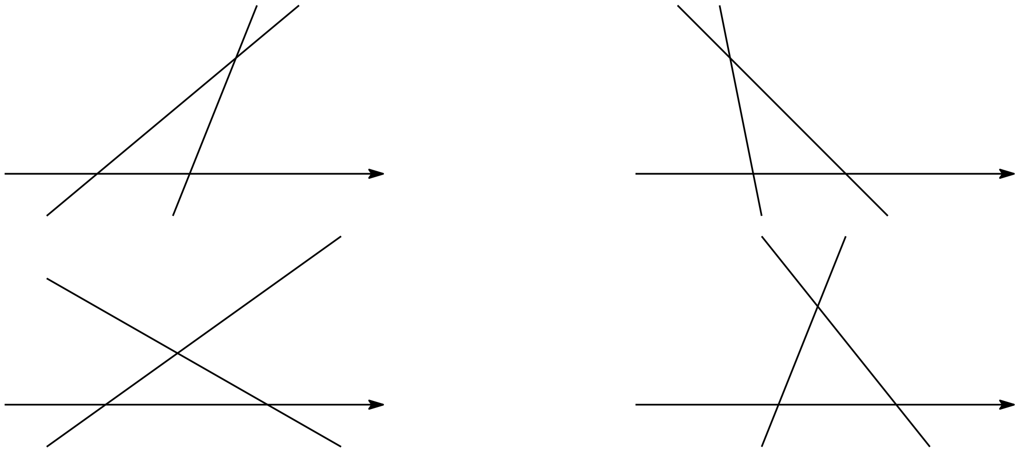
例題 25　2 直線 $y=3x-1$，$y=\dfrac{1}{2}x+1$ のなす鋭角を求めよ．

解　直線 $y=3x-1$ と $y=\dfrac{1}{2}x+1$ の x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ α，β とすると，2 直線のなす鋭角 θ は，$\theta=$ ____________．



先ほどの例題で，2 直線のなす鋭角 θ は $\theta = \alpha - \beta$ となりましたが，常に，そうなるのでしょうか．

下の 4 つの場合に，$\alpha - \beta$ がどこの角になるのか考えてみてください．



このように，$\alpha - \beta$ が必ずしも「2 直線のなす鋭角」になっていないことがわかります (左下図の場合)．ましてや，α と β を逆に設定したりすると，全く逆になってしまいます．

例えば，60° と 120° で交わっている 2 直線の場合，当然，「2 直線のなす鋭角」は 60° を選びます．

ここで，それぞれの tan の値を計算すると，$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$，$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$，と異符号になっています．つまり，$\tan 60^\circ = |\tan 120^\circ|$．

このことはつまり，とにかく，$\tan(\alpha - \beta)$ の値を計算してみて，正の数ならそれが鋭角，負の数なら鈍角の方を選んだことになるから，絶対値をつけて正の数に変えればよいことを意味しています．

▷Point◁　$\boxed{\text{2 直線のなす角}}$

垂直でない，交わる 2 直線 $y = m_1x + n_1$，$y = m_2x + n_2$ の x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ α，β とする．このとき，2 直線のなす鋭角を θ とすると，

$$\tan\theta = |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} \right|$$

となる．

このように，絶対値をつけておくと，どっちが鋭角になるのか，いちいち考えなくいいので便利です．α と β を逆にとっても何の問題もありません．

演習 22　次の 2 直線のなす鋭角を求めよ．

(1) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + 4$，$y = -3\sqrt{3}x - 2$　　(2) $2x - y - 1 = 0$，$x - 3y + 3 = 0$

4STEP $\boxed{283}$ をやっておくこと．

8.2　2 倍角の公式

『2 倍角の公式』とは次のようなものです．

▷Point◁ 2 倍角の公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

特に，$\cos 2\theta$ は，

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

とも表記され，状況に応じて使い分ける必要あり．

例題 26　『2 倍角の公式』を証明せよ．

注　このように，『2 倍角の公式』は『加法定理』から簡単に導き出せるので，無理に暗記しなくてもその都度，『加法定理』から作ればよいのですが，『2 倍角の公式』は，今後，最も頻繁に登場する公式なので，知らず知らずのうちに，覚えてしまうでしょう．すぐに答えられるようにしておいてください．

演習 23　$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で，$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ のとき，次の値を求めよ．

（1）$\sin 2\alpha$　（2）$\cos 2\alpha$　（3）$\tan 2\alpha$

8.3　3倍角の公式

『3倍角の公式』とは次のようなものです．

▷Point◁ 3倍角の公式

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$$\cos 3\theta = -3\cos\theta + 4\cos^3\theta$$

例題 27　『3倍角の公式』を証明せよ．

注　このように，『3倍角の公式』を証明するには，『加法定理』と『2倍角の公式』をどっちも使うことになるので，結構メンドウです．なので，丸暗記してしまったほうがよいでしょう．

参考　なお，この『3倍角の公式』を

$$\sin^3\theta = \frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4} \qquad \cos^3\theta = \frac{3\cos\theta + \cos 3\theta}{4}$$

のように変形して，数学 Ⅲ の積分で『次数下げの公式』として利用することがあります．そのときに，この公式のありがたみを実感するはずです．

8.4　半角の公式

『半角の公式』とは『2 倍角の公式』の裏返しです．つまり，

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$　より　$\sin^2\theta =$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$　より　$\cos^2\theta =$

ここで，$\theta = \dfrac{\alpha}{2}$ と置き換えると，次の公式が得られます．

▷Point◁　半角の公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \qquad\qquad \tan^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} =$$

注　$\dfrac{\alpha}{2}$ という形に惑わされないようにしよう．

例題 28　$\sin\dfrac{\pi}{8}$，$\cos\dfrac{\pi}{8}$，$\tan\dfrac{\pi}{8}$ の値を求めよ．

演習 24　$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で，$\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ のとき，$\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$，$\tan\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ．

9　三角方程式・不等式 (教科書 p143)

▷Point◁　三角方程式・不等式の解き方

まずは，各種公式を用いて，sin，cos，tan の 1 種類の三角関数だけで統一し，置き換えして積の形（因数分解）に持ち込む．

なお，置き換えした場合，文字の範囲に注意する．
もし，1 種類だけの三角関数で統一できなかったとしても，積の形に持ち込めれば大丈夫．

例題 29　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け．

(1) $2\sin^2\theta + \cos\theta - 2 = 0$　　(2) $2\cos^2\theta + 2 \geqq -7\sin\theta$

4STEP　279 をやっておくこと．

例 題 30　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け．

(1) $\cos 2x = -3\cos x + 1$　　(2) $\cos 2x < -3\cos x + 1$

演習 25　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け．

(1) $2\cos 2x = 4\sin x - 1$　　(2) $\sin 2x = \sin x$　　(3) $\cos 2x < \cos x$

4STEP　$\boxed{299}$, $\boxed{300}$ をやっておくこと．

10　三角関数の最大最小 (教科書 p132)

例 題 31　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数

$$y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

演習 26　$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，関数

$$y = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

例 題 32　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数

$$y = \sin^2\theta - \cos\theta$$

の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

演習 27　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，関数

$$y = \cos 2x - 2\sin x + 1$$

の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

4STEP　$\boxed{269}$, $\boxed{277}$, $\boxed{278}$, $\boxed{301}$ をやっておくこと．

11　三角関数の合成 (教科書 p146〜p148)

$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$ を加法定理でバラすと，次のようになります．

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$$

このように，$\bigcirc\sin\theta+\triangle\cos\theta$ の形で表されます (今回の場合，$\bigcirc=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\triangle=\dfrac{1}{2}$)．

この計算式の逆をたどることが三角関数の『合成』です．つまり，

$$\begin{aligned}&\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\\=&\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\\=&\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\end{aligned}$$

ようするに，三角関数の『合成』とは加法定理の単なる逆に過ぎません．

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\qquad\qquad\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$$

よって三角関数を合成するときは常に加法定理を頭の中にイメージすることが大切です．

▷Point◁ $\boxed{\text{三角関数の合成とは}}$

三角関数の『合成』とは，『加法定理』の単なる逆に過ぎない．
よって，常に，加法定理の逆を意識すること．

まず，加法定理とは，

$$\begin{aligned}\sin(\theta\pm\alpha)&=\sin\theta\cos\alpha\pm\cos\theta\sin\alpha\\&=\cos\alpha\sin\theta\pm\sin\alpha\cos\theta\end{aligned}$$

でした．

よって，$\bigcirc\sin\theta\pm\triangle\cos\theta$ を『合成』するには，$\bigcirc=\cos\alpha$，$\triangle=\sin\alpha$ と置き換えればよいのです．このような置き換えが可能であれば，このときの α を用いて，

$$\begin{aligned}\bigcirc\sin\theta\pm\triangle\cos\theta&=\cos\alpha\sin\theta\pm\sin\alpha\cos\theta\\&=\sin\theta\cos\alpha\pm\cos\theta\sin\alpha\\&=\sin(\theta\pm\alpha)\end{aligned}$$

というように，三角関数の『合成』が完成します．

最初の例でやってみよう．

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$$

例題 33　加法定理の逆を意識しながら，『合成』して元に戻せ．

(1) $\dfrac{1}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta$

次に問題になるのは，$\bigcirc\sin\theta+\triangle\cos\theta$ を合成するとき，「いつでも勝手に $\bigcirc=\cos\alpha$，$\triangle=\sin\alpha$ と置き換えてしまって良いのか？」ということです（前ページの説明にも「このような置き換えが可能であれば」と書いてましたね）．

例えば，$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ を合成する場合，いきなり $1=\cos\alpha$，$\sqrt{3}=\sin\alpha$ と置き換えることはできません．（sin の値が 1 より大きくなることなんて絶対にない！）．

次のことが重要です．

$\bigcirc^2+\triangle^2=1$ ならば，$\bigcirc=\cos\alpha$，$\triangle=\sin\alpha$ と置き換えることができる

これまでの例は，最初から $\bigcirc^2+\triangle^2=1$ の形になっていたので，いきなり置き換えても問題なかったのです．それでは，一般的な $a\sin\theta\pm b\cos\theta$ の合成はどのようにすればよいのでしょうか．それは，

▷Point◁

$a\sin\theta\pm b\cos\theta$ を $\sqrt{a^2+b^2}$ でくくり出せばうまくいく

のです．つまり，$\sqrt{a^2+b^2}$ でくくり出すと，

$$a\sin\theta\pm b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$$

このとき，

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$$

となるので，$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$，$\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$ と置き換えることができます．

この α を用いて，『合成』をします．

▷Point◁ $\boxed{a\sin\theta \pm b\cos\theta \text{ の合成}}$

$$a\sin\theta \pm b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$$

ここで，$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$，$\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$ と置き換えでき，この α を用いて，

$$\begin{aligned} a\sin\theta \pm b\cos\theta &= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin\theta \pm \sin\alpha\cos\theta) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha \pm \cos\theta\sin\alpha) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta \pm \alpha) \end{aligned}$$

と『合成』できる．

それでは，一般的な『合成』に挑戦しよう．問題文がムツカシソウに書かれてますが，要するに『合成しろ』ということです．

例 題 34　次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ．ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする．

(1) $\sin\theta+\cos\theta$　　(2) $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$

4STEP $\boxed{313}$，$\boxed{314}$ をやっておくこと．

例題 35　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け．

(1) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$　　(2) $\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta < 1$

演習 28　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け．

(1) $\sin x + \sqrt{3}\cos x < 1$　　(2) $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta \leqq 2$

4STEP　$\boxed{315}$, $\boxed{316}$ をやっておくこと．

例 題 36 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，

$$y = \sin x + \cos x$$

の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ．

演習 29 $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，

$$y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$$

の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ．

4STEP $\boxed{317}$, $\boxed{318}$, $\boxed{320}$ をやっておくこと．

さて,「三角関数の『合成』とは加法定理の単なる逆に過ぎない」と述べ,加法定理を常に意識して合成するように説明しました.

今回は三角関数のグラフを使って『合成』の意味を考えたいと思います.

例えば,$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ を合成すると次のようになります (途中は省略).

$$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

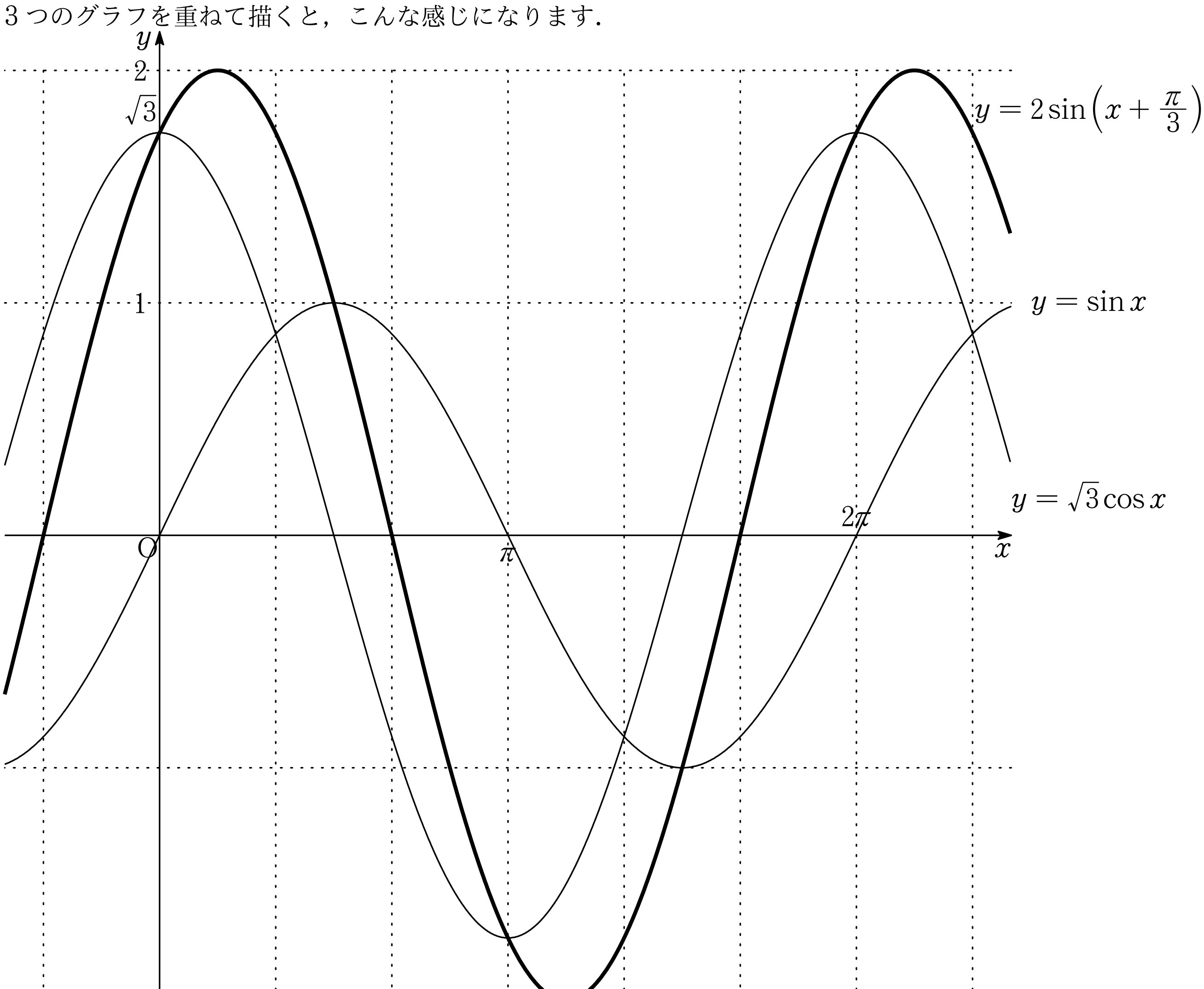
この式を次のように解釈します.

$y=\sin\theta$ のグラフと $y=\sqrt{3}\cos\theta$ のグラフを足し合わせたら,
$y=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフになる.

つまり,**『合成』とは 2 つのグラフの足し合わせ**だというのです.

本当にそうなっているのか実際にグラフを使って検証してみよう.

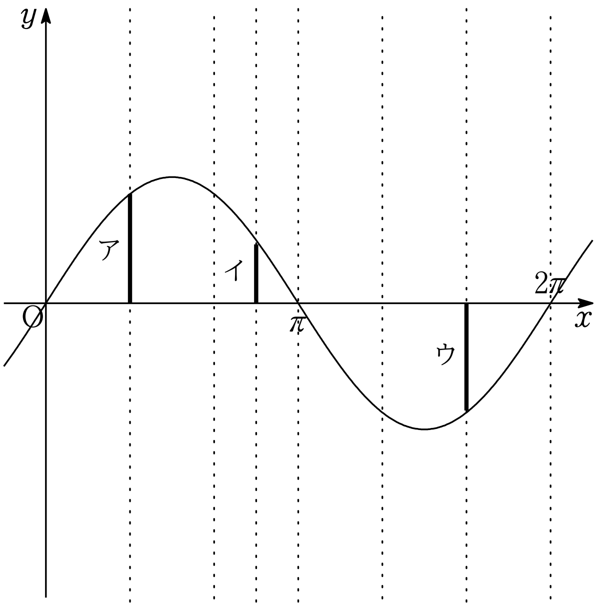
3 つのグラフを重ねて描くと,こんな感じになります.



このままではよくわからないので,3 つのグラフを分けて描いて,『合成』の仕組みを検証してみよう.

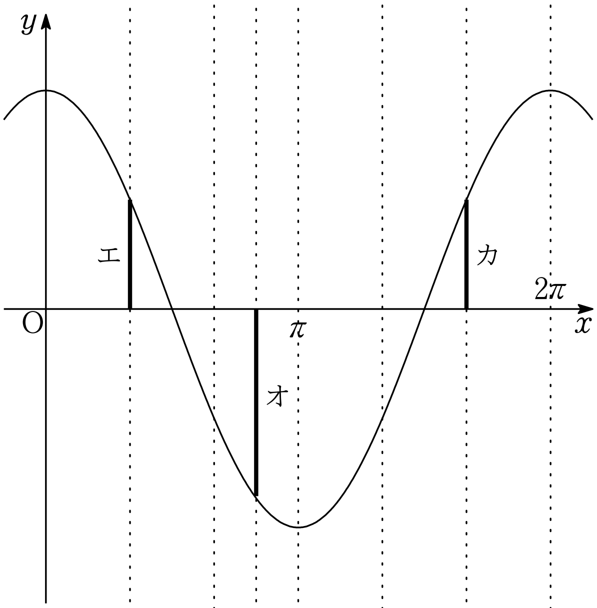
演習 30　定規を用意して，図 1，図 2，図 3 の太線部の長さを測り，$y = \sin\theta$ のグラフと $y = \sqrt{3}\cos\theta$ のグラフを足し合わせれば，$y = 2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフになっていることを実感せよ．

なお，x 軸より上部は正の長さ，下部は負の長さとして計測せよ．



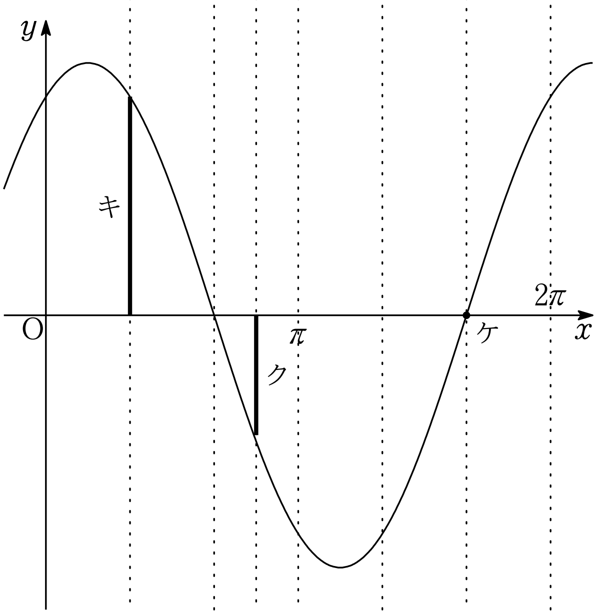
$$y = \sin\theta$$

ア＝　　　　イ＝　　　　ウ＝



$$y = \sqrt{3}\cos\theta$$

エ＝　　　　オ＝　　　　カ＝



$$y = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

キ＝　　　　ク＝　　　　ケ＝

12　三角関数の和と積の公式 (教科書 p144～p145)

最後に三角関数の和と積の公式を紹介しよう．

理系志望の人は絶対に知っておかねばなりませんが，文系志望の人はまあスルーしてもかまわないでしょう．でも，2014 年の大阪大学の文系数学で，この公式を知らないと全く解けない問題が出題されました．なのでで，文系でもそれなりの大学を目指す人は，知っておいたほうがよいかもね．

▷Point◁　積 → 和の公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

例題 37　『積和公式』を導き出せ．

注　このように『積和公式』は『加法定理』の組合せで簡単に導き出すことができます．なので，わざわざ暗記する必要はありません (実際，僕も憶えていません)．

参考　この『積和公式』は，やはり数学 III の積分で威力を発揮します．

▷Point◁ 和 → 積の公式

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

例題 38　『和積公式』を導き出せ.

注　このように,『和積公式』は『積和公式』から導き出されます．なので,『積和公式』を憶えていない人は,『加法定理』⟶『積和公式』⟶『和積公式』という流れで導くわけですが，如何せん時間がかかり過ぎます．よって，この公式は丸暗記するのが良いと思います.

4STEP　304, 305, 306, 307 をやっておくこと.

例題 39　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，$\sin 3x + \sin x = 0$ を次の2通りの方法で解け.

(1) 3倍角の公式を利用する方法　　(2)『和積公式』を利用する方法

演習 31　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，$\cos 3x = \cos x$ を解け.

4STEP $\boxed{309}$, $\boxed{310}$ をやっておくこと.

13　応用問題

入試頻出の重要問題を紹介しよう．章のタイトルは「応用問題」ですが，これらの問題は，定番中の定番問題なので，入試問題でいえば「標準問題」です．

例題 40

(1) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，$y = 3\sin x + 4\cos x$ の最大値，最小値を求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$y = 3\sin x + 4\cos x$ の最大値，最小値を求めよ．

解

例題 41　次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ．

$$y = \sin^2 x + 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x \quad (0 \leqq x < 2\pi)$$

解

4STEP　$\boxed{319}$ をやっておくこと．

例 題 42　次の関数 $y = 2\sin x\cos x + \sin x + \cos x$ について，次の問いに答えよ．

(1) $t = \sin x + \cos x$ として，y を t の関数で表せ．

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) y の最大値と最小値を求めよ．

解

4STEP $\boxed{321}$ をやっておくこと．

例題 43　$\triangle ABC$ において，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

4STEP　$\boxed{312}$ をやっておくこと．

とりあえず，これでおしまい．お疲れ様でした．