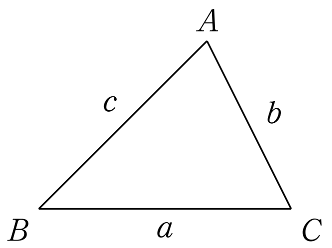
まず始めに，三角形の角度と辺の長さの表記方法について確認しておきます．

▷Point◁ 約束ごと

角度はアルファベットの大文字 (A，B，C・・・) で，
辺はアルファベットの小文字 (a，b，c・・・) で表記する．
角度のつける順番は原則的に反時計回り．
辺は，三角形の場合，$\angle A$ に向かい合う辺を a，
$\angle B$ に向かい合う辺を b，$\angle C$ に向かい合う辺を c とする．



4　正弦定理 (教科書 p137～p139)

この章の目標　正弦定理の意味を理解し，使いこなせるようになろう．

次の 例 を通して，正弦定理の意味を実感しよう．

例　下の円は半径 5cm の円である．
この円に内接する三角形 ABC を自由に 1 つ書いて，次の各問に答えよ．

(1) 3 辺の長さ，a，b，c の長さを定規で測れ．

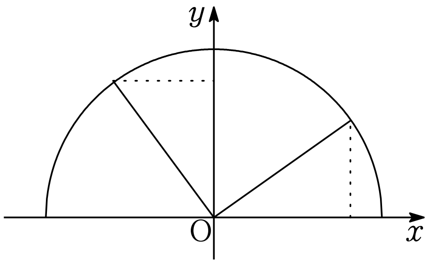
(2) 3 つの角 A，B，C の大きさを分度器で測れ．

(3) $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ の値を教科書の三角比の表から読み取れ．

(4) $\dfrac{a}{\sin A}$，$\dfrac{b}{\sin B}$，$\dfrac{c}{\sin C}$ の値を計算せよ．この値は一体なにを意味しているのであろうか．

✎注　三角比の表は $90°$ までしか載っていないので，ひょっとして鈍角三角形を書いてしまった人は，鈍角の三角比の値が表に載っていないので焦るかもしれない．
しかし，鈍角の三角比の値も表にちゃんと載っている！！．例えば，$\sin 130°$ の値を三角比の表から探す場合，どこを見ればよいのだろうか．

$\sin$ の値は，単位円上での y 座標のこと．つまり，例えば
$\sin 130°$ の値は，単位円上の $130°$ のところの y 座標になる．
ここで直角三角形の合同に注目すると，$130°$ のところの y 座標は，
______$°$ のところの ______ 座標に等しい．
つまり，$\sin 130°$ の値は ________ に等しいので，
ちゃんと三角比の表に載っている．



解　あなたの結果を書こう．

$a =$ ________　　$b =$ ________　　$c =$ ________

$A =$ ________　　$B =$ ________　　$C =$ ________

$\sin A =$ ________　　$\sin B =$ ________　　$\sin C =$ ________

$\dfrac{a}{\sin A} =$ ________　　$\dfrac{b}{\sin B} =$ ________　　$\dfrac{c}{\sin C} =$ ________

よって，$\dfrac{a}{\sin A}$，$\dfrac{b}{\sin B}$，$\dfrac{c}{\sin C}$ の値は $\triangle$ABC の __________ であると推測される．

■

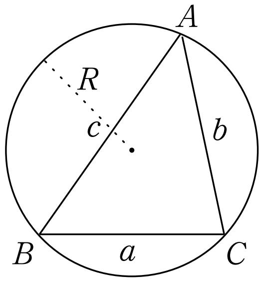
一般的に，次の定理が成立します．

▷Point◁　正弦定理 ※超重要

定理 1　$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とするとき，

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

が成立する．



✎注　この関係式は次のように分けて表記されることもあります．同じことです．

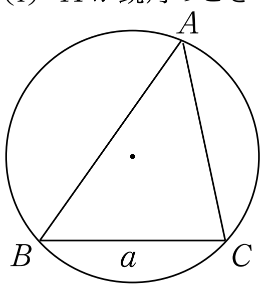
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \iff \begin{cases} \dfrac{a}{\sin A} = 2R \\ \dfrac{b}{\sin B} = 2R \\ \dfrac{c}{\sin C} = 2R \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2R\sin B \\ c = 2R\sin C \end{cases}$$

例 題 1　正弦定理を証明せよ．

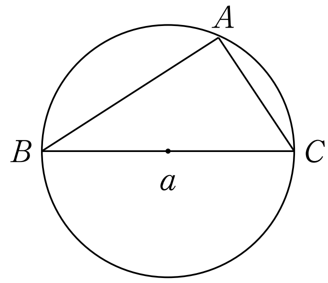
解 $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ が成立することを示す．

この式を変形すると，$\sin A = \dfrac{a}{2R}$ なので，この式を示せばよい．

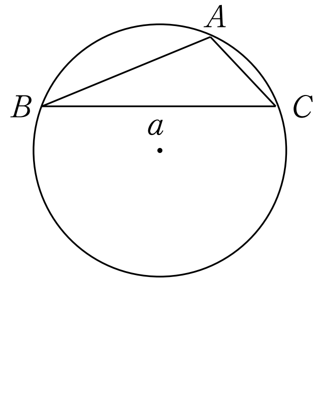
（i） A が鋭角のとき



（ii） A が直角のとき



（iii） A が鈍角のとき



よって，いずれの場合においても，$\sin A = \dfrac{a}{2R}$ すなわち $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ が成立する．

同様に，$\underline{\qquad\qquad\qquad}$，$\underline{\qquad\qquad\qquad}$ も成立するので，正弦定理が証明された．

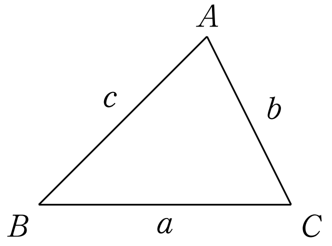
▷Point◁ 正弦定理の使い方 ①

2組の辺と角の比の関係式として用いる．つまり，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$$



例題 2　$\triangle ABC$ において，$a=10$，$B=60^\circ$，$C=75^\circ$ のとき，b を求めよ．

解　$A+B+C=180^\circ$ なので，$A=$ ________$^\circ$

よって，正弦定理より，

________ = ________

演習 1　$\triangle ABC$ において，次のものを求めよ．

(1) $b=6$，$B=30^\circ$，$C=45^\circ$ のときの c　　(2) $c=4$，$A=120^\circ$，$B=15^\circ$ のときの a

4STEP 259 をやっておくこと．

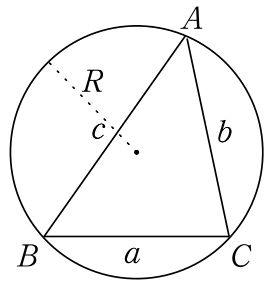
▷Point◁ 正弦定理の使い方 ②

1 組の辺と角，外接円の半径の関係式として用いる．つまり，

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \iff a = 2R\sin A$$

$$\frac{b}{\sin B} = 2R \iff b = 2R\sin B$$

$$\frac{c}{\sin C} = 2R \iff c = 2R\sin C$$



例題 3　$\triangle ABC$ において，$a = 6$，$A = 30^\circ$ のとき，外接円の半径 R を求めよ．

解　正弦定理より，

$$\frac{\qquad}{\qquad} =$$

演習 2　$\triangle ABC$ において，外接円の半径を R とする．次のものを求めよ．

(1) $b = 8$，$B = 60^\circ$ のときの R　　(2) $a = R$ のときの A

4STEP $\boxed{260}$ をやっておくこと．

5　余弦定理 (教科書 p140～p142)

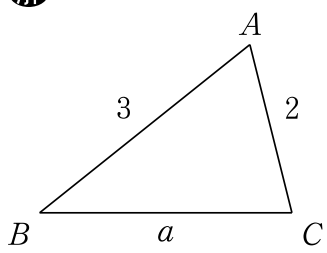
この章の目標　余弦定理の意味を理解し，使いこなせるようになろう．

まずは，次の 例 を考えてみよう．

例　△ABC において，$b=2$，$c=3$，$A=60^\circ$ のとき，a を求めよ．

考え方　補助線を 1 本うまく引けば，中学校の知識で解決します．

解



この 例 を一般化したものが余弦定理です．

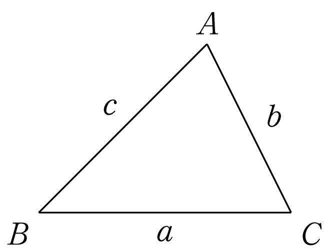
▷Point◁　余弦定理 ※超重要

定理 2　$\triangle ABC$ において，次の関係が成り立つ．

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

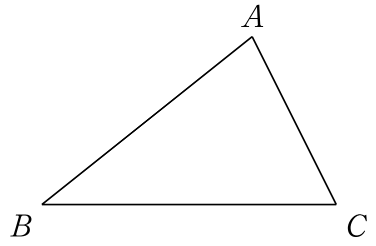


演習 3　先ほどの 例 を上の余弦定理の公式に当てはめて解いてみよ．

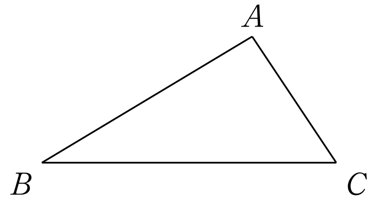
例 題 4　余弦定理を証明せよ.

解 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ が成立することを示す.

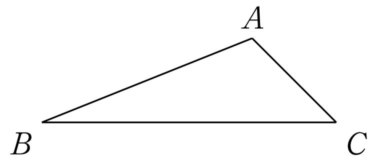
(i) A が鋭角のとき



(ii) A が直角のとき



(iii) A が鈍角のとき



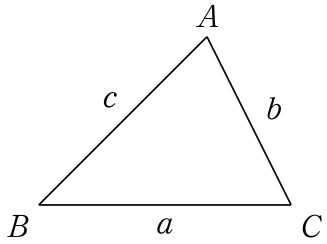
よって，いずれの場合においても，$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ が成立する.

同様に，$b^2 =$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿，$c^2 =$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ も成立するので，余弦定理が証明された.

▷Point◁ 余弦定理の使い方 ①

2 辺の長さと 1 つの角度の大きさが与えられたときに，

余弦定理を用いれば残りの辺の長さを求めることができる．



例 題 5　$\triangle ABC$ において，次のものを求めよ．

(1) $a=3$，$c=2\sqrt{2}$，$B=45^\circ$ のときの b

(2) $a=\sqrt{5}$，$b=\sqrt{2}$，$A=45^\circ$ のときの c

解

演習 4　$\triangle ABC$ において，次のものを求めよ．

(1) $a=8$，$b=7$，$C=120^\circ$ のときの c

(2) $b=7$，$c=8$，$B=60^\circ$ のときの a

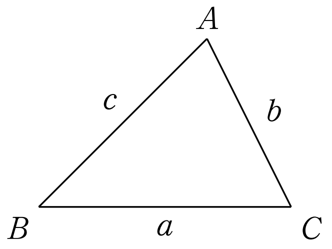
4STEP　$\boxed{261}$，$\boxed{262}$，$\boxed{266}$ をやっておくこと．

▷Point◁ 余弦定理の使い方 ②

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \iff \cos A =$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \iff \cos B =$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \iff \cos C =$



したがって，3 辺の長さが与えられると，角度を求めることができる．

例題 6　$\triangle ABC$ において，$a = 5$，$b = 3$，$c = 7$ のとき，C を求めよ．

解

演習 5　$\triangle ABC$ において，$a = 2$，$b = 7$，$c = 3\sqrt{3}$ のとき，B を求めよ．

演習 6　$\triangle ABC$ において，$a = \sqrt{3} + 1$，$b = 2$，$c = \sqrt{6}$ のとき，A，B，C をすべて求めよ．

4STEP　$\boxed{263}$，$\boxed{268}$(5)(6) をやっておくこと．

6　正弦定理と余弦定理の応用 (教科書 p142〜p148)

この章の目標　いろいろな図形の問題を，正弦定理と余弦定理を駆使して解けるようになろう．

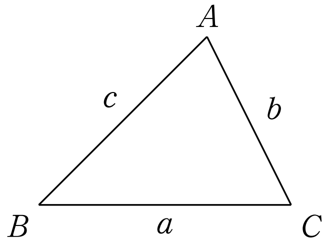
使うネタは「正弦定理」と「余弦定理」だけです．どっちを使うのかを自分で見極めねばなりません．概ね，次のように判断します．

▷Point◁　**正弦定理と余弦定理の見極め**

2辺と1つの角が与えられたとき $\Longrightarrow$ ________ 定理

1辺と2つの角が与えられたとき $\Longrightarrow$ ________ 定理

3辺が与えられたとき $\Longrightarrow$ ________ 定理



これはあくまでも目安であって，「必ずその定理で解かねばならない」ということではありません．「正弦定理」と「余弦定理」の2つしかないんだから，あまりマニュアルに頼らずに，どっちを使うのか，その都度，自分で考えたほうが勉強になるでしょう．とりあえずどっちかでやってみて，うまくいかなかったら変更すればよいだけのことです．

例題 7　$\triangle ABC$ において，$b=2$，$c=\sqrt{3}+1$，$A=60^\circ$ のとき，a，B，C を求めよ．

解

演習 7　$\triangle ABC$ において，$b=2$，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$A=45^\circ$ のとき，a，B，C を求めよ．

例題 8　△ABC において，$a=\sqrt{6}$，$b=2$，$B=45^\circ$ のとき，c，A，C を求めよ．

解

演習 8　△ABC において，$b=2$，$c=\sqrt{2}$，$C=30^\circ$ のとき，a，A，B を求めよ．

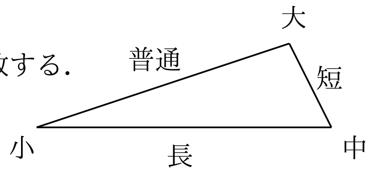
4STEP　$\boxed{268}$(1)〜(4)，$\boxed{269}$，$\boxed{270}$，$\boxed{271}$ をやっておくこと．

7　三角形の角の大きさと辺の長さの関係 (教科書 p143)

次の事実はほとんど明らかでしょう．

▷Point◁ 三角形の角の大きさと辺の長さの関係

三角形の角の大小関係は，その向かい合う辺の長さの大小関係と一致する．
つまり，辺の長さが長いほど，向い合う角度も大きい．



また，次の事実もほとんど明らかでしょう．

▷Point◁ 三角形の種類の区別

三角形が，鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のいずれであるかを調べるには，最大の角が，鋭角，直角，鈍角のいずれであるかを調べれば良い．

となれば，三角形の角が，鋭角，直角，鈍角のいずれであるのかを判別する方法が必要になってきます．

▷Point◁ 角の判別

$\cos A =$ 　　　　　　　なので，

A が鋭角 $\iff$ $A < 90^\circ$ $\iff$ $\cos A$_______ $\iff$

A が直角 $\iff$ $A = 90^\circ$ $\iff$ $\cos A$_______ $\iff$

A が鈍角 $\iff$ $A > 90^\circ$ $\iff$ $\cos A$_______ $\iff$

したがって，3 辺の長さが与えられると，角度が鋭角なのか，直角なのか，鈍角なのかを判別できる．

例題 9　$\triangle ABC$ において，$a = 3$，$b = 5$，$c = 6$ のとき，A，B，C は鋭角，直角，鈍角のいずれであるか．

解　$a^2 =$ _____，$b^2 =$ _____，$c^2 =$ _____

A について，a^2_____$b^2 + c^2$

B について，b^2_____$c^2 + a^2$

C について，c^2_____$a^2 + b^2$

したがって，A は _______，B は _______，C は _______ である．

4STEP $\boxed{264}$ をやっておくこと．

例 題 10　△ABC において，$a=5$，$b=6$，$c=7$ のとき，△ABC は鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のいずれであるか．

解　最大の角は ______ であるので，______ が鋭角か，直角か，鈍角かを調べれば良い．

したがって，C が ________ なので，△ABC は ________ 三角形である．

4STEP　$\boxed{265}$，$\boxed{272}$をやっておくこと．

▷Point◁　「sin の比」と「辺の比」の関係 ※超重要

正弦定理より，$\sin A =$ _______，$\sin B =$ _______，$\sin C =$ _______ なので，

$\sin A : \sin B : \sin C =$ _____ : _____ : _____ $=$ _____ : _____ : _____

つまり，「sin の比」と「辺の比」は ___________.

例題 11　$\triangle ABC$ において，$\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3$ のとき，この三角形の最も大きい角の大きさを求めよ.

解　$\sin A : \sin B : \sin C =$ _____ : _____ : _____ $= 7 : 5 : 3$ なので，
$a =$ _______，$b =$ _______，$c =$ _______，とおくことができる (ただし，_______).
よって，辺 _____ が最も長いので，角 _____ が最も大きい.

演習 9　$\triangle ABC$ において，$\dfrac{\sin A}{8} = \dfrac{\sin B}{7} = \dfrac{\sin C}{3}$ のとき，この三角形の最も小さい角の余弦を求めよ.

4STEP　$\boxed{273}$, $\boxed{274}$, $\boxed{275}$ をやっておくこと.

8　三角形の面積 (教科書 p149)

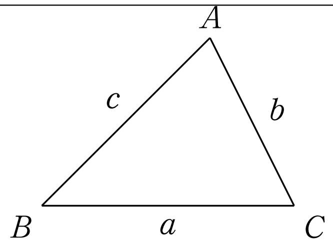
この章の目標　三角形の面積公式をできるだけたくさん身につけよう.

三角形の面積が,（底辺）×（高さ）÷ 2 で求められることは小学校で学習しましたが，この公式から，他にも様々な三角形の面積公式が導き出されます.

8.1　2 辺とその間の角がわかっている場合

▷Point◁　三角形の面積公式 ※超重要

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$



例題 12 上の公式を証明せよ.

解 $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ を示す.

(i)　A が鋭角のとき　　(ii)　A が直角のとき　　(iii)　A が鈍角のとき

したがって，いずれの場合にも $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ が成立する.

他の場合も同様にして，$S = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$ が成立する.

演習 10　次のような $\triangle ABC$ の面積を求めよ.

(1)　$a = 3$，$c = 8$，$B = 60^\circ$　　(2)　$a = \sqrt{6}$，$b = 2\sqrt{2}$，$C = 150^\circ$

8.2　3 辺の長さがわかっている場合

例 題 13　$\triangle ABC$ において，$a=5$，$b=6$，$c=7$ のとき，この三角形の面積 S を求めよ．

解　余弦定理より $\cos A =$

________________ より，

________ より，$\sin A =$

よって，$S =$ ________________

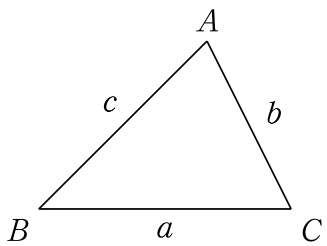
演習 11　$\triangle ABC$ において，$a=4$，$b=3$，$c=2$ のとき，この三角形の面積 S を求めよ．

この解法を一般的に公式にまとめたのが，次に紹介する**ヘロンの公式**です．

▷Point◁　ヘロンの公式

$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とするとき，

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$



演習 12　例 題 13，演習 11 をヘロンの公式で解きなおしてみよ．

注　この公式は，3 辺の長さが**整数値のときにきわめて有効**ですが，そうでないときには全く役に立ちません．よって，まずは，例 題 6 の解法をしっかりマスターして，状況に応じてヘロンの公式を使うようにしてください．

いちおうヘロンの公式を証明しておきます．先ほどの解法を一般的にやるだけです．

ヘロンの公式の証明

余弦定理より，$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\sin A > 0$ より，$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A}$

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2 A} = \frac{1}{2}bc\sqrt{(1+\cos A)(1-\cos A)} \\
&= \frac{1}{2}bc\sqrt{\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)} \\
&= \frac{1}{2}bc\sqrt{\left(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}\right)} \\
&= \frac{1}{2}bc\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{-(b-c)^2+a^2}{2bc}} \\
&= \frac{1}{2}bc\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}} \\
&= \frac{1}{2}bc\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}\cdot\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}} \\
&= \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}} \\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}
\end{aligned}$$

4STEP　$\boxed{283}$, $\boxed{284}$ をやっておくこと．

8.3　外接円の半径，内接円の半径，面積の関係

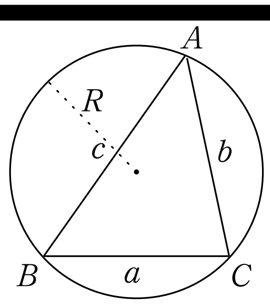
▷Point◁　**外接円の半径，内接円の半径，面積の関係** ※超重要

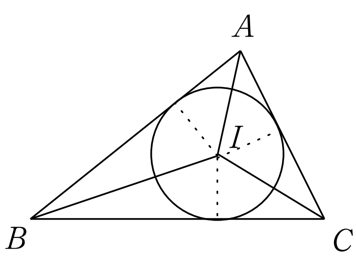
△ABC の外接円の半径を R，内接円の半径を r とするとき，

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = \frac{r}{2}(a+b+c)$$

が成立する．





例 題 14　$\triangle ABC$ において，$a=5$，$b=6$，$c=3$ のとき，

(1) この三角形の面積 S を求めよ．

(2) この三角形の外接円の半径 R を求めよ．

(3) この三角形の内接円の半径 r を求めよ．

演習 13　$a=7$，$b=5$，$c=4$ である $\triangle ABC$ の外接円の半径 R と内接円の半径 r を求めよ．

4STEP　$\boxed{293}$，$\boxed{294}$ をやっておくこと．

8.4　多角形の面積

四角形，五角形などの多角形は，三角形に分割することができるので，三角形の面積が求められれば，多角形の面積も求めることができます．あらためて「公式」というものはないので工夫して計算してください．

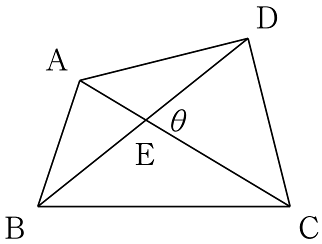
4STEP　$\boxed{288}$，$\boxed{289}$ をやっておくこと．

次の面積公式は，あまり使い道がありませんが，証明方法が勉強になるので紹介しておきます．

参考 四角形の面積公式

四角形の ABCD の対角線 AC と BD のなす角を θ とするとき，
四角形 ABCD の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AC}\cdot \mathrm{BD}\cdot \sin\theta$$



2 通りの証明を紹介しておきます．

証明 ①　対角線の交点を E とし，$EA=a$，$EB=b$，$EC=c$，$ED=d$ とおくと，

$\triangle\mathrm{EAB}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{EA}\cdot\mathrm{EB}\cdot\sin\theta=\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$

$\triangle\mathrm{EBC}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{EB}\cdot\mathrm{EC}\cdot\sin(180^\circ-\theta)=\dfrac{1}{2}bc\sin\theta$

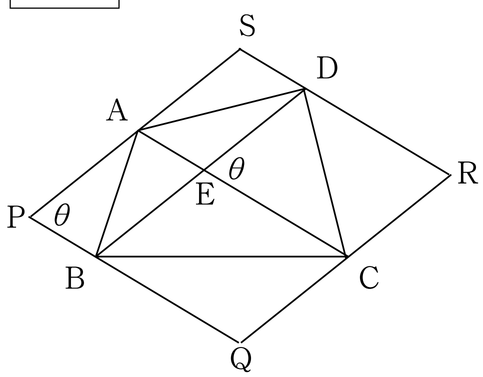
$\triangle\mathrm{ECD}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{EC}\cdot\mathrm{ED}\cdot\sin\theta=\dfrac{1}{2}cd\sin\theta$

$\triangle\mathrm{EDA}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{ED}\cdot\mathrm{EA}\cdot\sin(180^\circ-\theta)=\dfrac{1}{2}da\sin\theta$

よって四角形 ABCD の面積は，これら 4 つを足し合わせて，

$$\text{四角形 } ABCD=\frac{1}{2}(ab+bc+cd+da)\sin\theta=\frac{1}{2}(a+c)(b+d)\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}\cdot\sin\theta$$

証明 ②　各頂点を通り対角線と平行な直線を引く．図のように，点 P，Q，R，S を定める．



PQ // AC // SR，　PS // BD // QR なので，
四角形 EAPB，四角形 EBQC，四角形 ECRD，四角形 EDSA は平行四辺形である．よって，
$\triangle\mathrm{EAB}=\triangle\mathrm{PBA}$，$\triangle\mathrm{EBC}=\triangle\mathrm{QCB}$，$\triangle\mathrm{ECD}=\triangle\mathrm{RDC}$，$\triangle\mathrm{EDA}=\triangle\mathrm{SAD}$.
つまり，平行四辺形 PQRS の面積は，四角形 ABCD の面積の 2 倍である．
よって，四角形 ABCD の面積は平行四辺形 PQRS の $\dfrac{1}{2}$，つまり，$\triangle$PQS の面積に等しい．
$\mathrm{PQ}=\mathrm{AC}$，$\mathrm{PS}=\mathrm{BD}$，$\angle\mathrm{QPS}=\angle\mathrm{CED}=\theta$ なので，

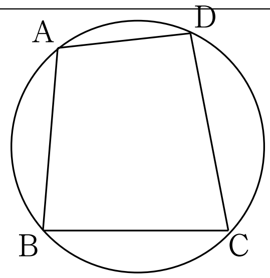
$$\text{四角形 } ABCD=\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PS}\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}\cdot\sin\theta$$

4STEP　$\boxed{286}$ をやっておくこと．

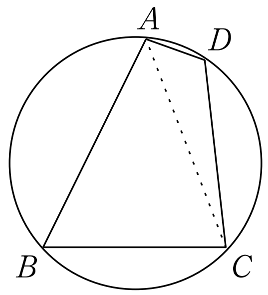
9　円に内接する四角形の性質 (教科書 p151)

▷Point◁

四角形を 2 つに分割し，それぞれの三角形で，
正弦定理や余弦定理を適用する．
円に内接する四角形の性質を利用する．
$A + C = B + D =$ ＿＿＿＿＿



例 題 15　円に内接する四角形 $ABCD$ において，
AB = 5，BC = 4，CD = 4，∠B = 60° であるとき，
次のものを求めよ．
(1) AC の長さ
(2) AD の長さ
(3) 四角形 $ABCD$ の面積



考え方 (1) は △ABC に注目して余弦定理，(1) は △ACD に注目して余弦定理を使います．

解

演習 14　円に内接する四角形 $ABCD$ において，AB = 5，BC = 8，CD = 3，∠B = 60° であるとき，四角形 $ABCD$ の面積を求めよ．

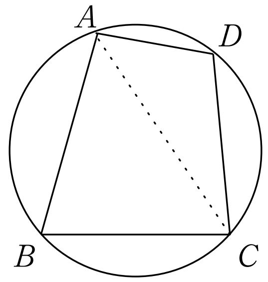
演習 15　円に内接する四角形 $ABCD$ において，AB = 1，BC = 1，CD = 2，DA = 3 である．

(1) BD の長さと $\angle BCD$ の大きさを求めよ．

(2) 四角形 $ABCD$ の面積を求めよ．

上智大学 (2007 年)

例題 16　円に内接する四角形ABCDにおいて，
AB = 5，BC = 4，CD = 4，DA = 2 であるとき，
次のものを求めよ．
(1) $\cos B$
(2) 四角形ABCDの面積



考え方　今回は四角形の内角が具体的に決まりません．
(1) は △ABC に注目して余弦定理を使いますが，そうすると，$\cos B$ と AC^2 という不確定な要素が2つ式中に登場してしまいます．$\cos B$ を求めるには，$\cos B$ と AC^2 に関する式をもうひとつ作らねばなりません．
(2)　当然ながら2つの三角形に分割して考えますが，面積を求めるには $\cos B$ ではなく，$\sin B$ に直す必要があります．

解　(1)
△ABC において余弦定理より，

$$\mathrm{AC}^2 =$$

△ACD において余弦定理より，

$$\mathrm{AC}^2 =$$

したがって，$\cos B =$ ＿＿＿＿

注　この問題では，「$\cos B$ を求めよ」と指示があるので，B と D に注目して式を立てました．特に指示がなければ，A と C に注目して，同様に，$\cos A$ を導きだして考えてもかまいません．

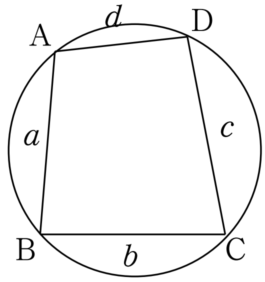
この解法を一般的に公式にまとめたのが，次に紹介する**ブラーマグプタの公式**です．

▷Point◁　ブラーマグプタの公式

円に内接する四角形 ABCD の，4 辺の長さを a，b，c，d とする．

$s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ とするとき，四角形の ABCD の面積 S は，

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$



演習 16　例 題 16 をブラーマグプタの公式で解きなおしてみよ．

注　この公式は，**4 辺の長さが整数値のときにきわめて有効**ですが，そうでないときには全く役に立ちません．よって，まずは，例 題 16 の解法をしっかりマスターして，状況に応じて公式を使うようにしてください．いちおう証明しておきます．先ほどの解法を一般的にやるだけです．

ブラーマグプタの公式の証明

△ABC において余弦定理より，$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos B$

△ACD において余弦定理より，

$$AC^2=c^2+d^2-2cd\cos D=c^2+d^2-2cd\cos(180^\circ-B)=c^2+d^2+2cd\cos B$$

よって，$a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2+2cd\cos B$．　$\therefore \cos B=\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$

$\sin B>0$ より，$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}$

$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin D=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin(180^\circ-B)\\
&=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin B=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin B\\
&=\frac{1}{2}(ab+cd)\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{1}{2}(ab+cd)\sqrt{(1+\cos B)(1-\cos B)}\\
&=\frac{1}{2}(ab+cd)\sqrt{\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)}\\
&=\frac{1}{2}(ab+cd)\sqrt{\left(\frac{2(ab+cd)+a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)\left(\frac{2(ab+cd)-a^2-b^2+c^2+d^2}{2(ab+cd)}\right)}\\
&=\frac{1}{2}(ab+cd)\sqrt{\frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{2(ab+cd)}\cdot\frac{-(a-b)^2+(c+d)^2}{2(ab+cd)}}\\
&=\frac{1}{2}(ab+cd)\sqrt{\frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{2(ab+cd)}\cdot\frac{(c+d)^2-(a-b)^2}{2(ab+cd)}}\\
&=\frac{1}{2}(ab+cd)\sqrt{\frac{(a+b+c-d)(a+b-c+d)}{2(ab+cd)}\cdot\frac{(c+d+a-b)(c+d-a+b)}{2(ab+cd)}}\\
&=\sqrt{\frac{-a+b+c+d}{2}\cdot\frac{a-b+c+d}{2}\cdot\frac{a+b-c+d}{2}\cdot\frac{a+b+c-d}{2}}\\
&=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}
\end{aligned}$$

4STEP　$\boxed{290}$，$\boxed{291}$ をやっておくこと．

演習 17　円に内接する四角形 $ABCD$ において，$\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{BC}=3$，$\mathrm{DA}=2$，$\angle\mathrm{ABC}=60^\circ$ であるとき，次の問いに答えよ.

(1) 辺 CD の長さを求めよ.

(2) 四角形 $ABCD$ の面積を求めよ.

(3) 辺 BD の長さを求めよ.

(4) $\triangle BCD$ の面積を求めよ

同志社大学 (2011 年)

10　角の二等分線，三角形の中線の長さ (教科書　なし)

例題 17　$\triangle ABC$ において，AB = 5，AC = 3，$A = 120^\circ$ とする．$\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき，AD の長さを求めよ．

解

4STEP　295 をやっておくこと．

このように角の二等分線の長さは，面積を利用すれば簡単に求められますが，あくまでもこれは角の大きさが 120° や 60° などの有名角の場合だけであって，一般的な角度の場合は，面積を利用しても求めることができません．

例題 18　$\triangle ABC$ において，AB = 3，BC = 4，CA = 2 とする．$\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき，次のものを求めよ．

(1) $\cos B$ の値

(2) BD の長さ

(3) AD の長さ

解

かなりメンドウな解法になってしまいましたが，この手法は次に紹介する中線の求め方にも適応できるので，とても有効な解法です．

例題 19　$\triangle ABC$ において，AB = 3，BC = 4，CA = 2 とする．BC の中点の交点を M とするとき，AM の長さを求めよ．

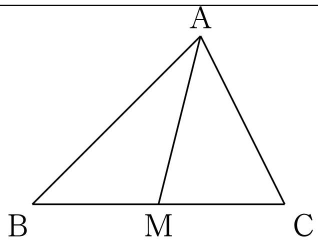
解

さて，中線については，次に紹介する中線定理が有名です．

▷Point◁　中線定理 (パップスの定理)

△ABC の辺 BC の中点を M とするとき，

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)$$



証明は，先ほどの解法を一般化するだけです．

中線定理の証明

△ABC において余弦定理より，$\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

△ABM において余弦定理より，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{AM}^2 = \mathrm{BA}^2 + \mathrm{BM}^2 - 2\cdot\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BM}\cdot\cos B\\
=&c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\cdot c\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\
=&c^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{c^2+a^2-b^2}{2}\\
=&\frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{4}
\end{aligned}$$

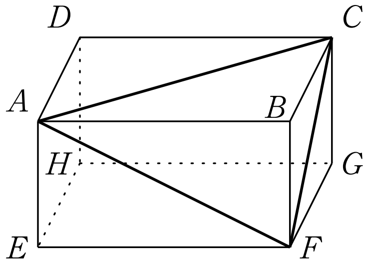
よって，

$$\begin{aligned}
&2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)\\
=&2\left(\frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)\\
=&c^2 + b^2\\
=&\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2
\end{aligned}$$

11　空間図形への応用 (教科書 p153〜p154)

空間図形の問題は，特定の平面（断面）に注目して考えると，平面図形の問題になるので，これまでと同じように考えることができます．

その中でも特に重要な問題を 3 つ紹介しておきます．



例題 20　AB = 3，AD = 1，AE = 2 である直方体 ABCD-EFGH がある．

(1) $\triangle AFC$ の面積を求めよ．

(2) 頂点 B から $\triangle AFC$ に下ろした垂線の長さを求めよ．

考え方　まずは △AFC の 3 辺の長さを求めます．うまく整数値になればヘロンの公式で一発終了ですが，そうでない場合は・・・・

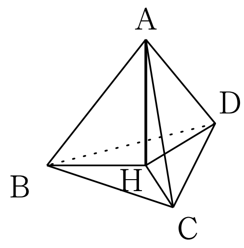
四面体 BAFC において，△AFC を底面に見たときの「高さ」が求める垂線の長さです．四面体 BAFC の体積に注目します．

解

4STEP　298 をやっておくこと．

▷Point◁

AB = AC = AD である四面体 ABCD において，
頂点 A から △BCD におろした垂線の足を H とするとき，
点 H は △BCD の ＿＿＿＿＿ である．
よって，BH，CH，DH は，
△BCD の ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ である．



演習 18　上の事実を証明せよ．

例 題 21　PA = PB = PC = 4，AB = 6，BC = 4，CA = 5 である三角錐 $PABC$ の体積 V を求めよ．

考え方 △ABC を底面とします．P から △ABC に下ろした垂線 PH の長さを求めるには，AH または BH または CH の長さが必要です．

解

4STEP $\boxed{299}$ をやっておくこと．

▷Point◁

四面体 ABCD の体積を V，表面積を S とする．

四面体 ABCD に内接する球の中心を I，半径を r とすると

$$V = (\text{四角錐 IABC}) + (\text{四角錐 IACD}) + (\text{四角錐 IABD}) + (\text{四角錐 IBCD}) = \frac{1}{3}rS$$

例 題 22　AB = AC = AD = 6,　BC = CD = DB = $6\sqrt{2}$ である三角錐 $ABCD$ の体積を V，表面積を S とする．

(1) V と S を求めよ．

(2) この四面体に内接する球の半径を r を求めよ．

解

4STEP　$\boxed{300}$ をやっておくこと．

12　三角形の形状 (教科書　なし)

▷Point◁　$\boxed{\text{三角形の形状の調べ方}}$ ※重要

関係式に正弦定理や余弦定理を代入して，辺だけの関係式に変形する．

最終的に因数分解に持ち込むことが多い．

例題 23　$\triangle ABC$ において，次の等式が成り立つとき，この三角形はどのような形をしているか．

(1) $\sin A = 2\cos B \sin C$

(2) $b\cos B = c\cos C$

解

(1) 正弦定理, 余弦定理より, $\sin A =$ ＿＿＿＿＿＿, $\cos B =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿, $\sin C =$ ＿＿＿＿＿＿ なので,

(2) 余弦定理より，$\cos B =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿，$\cos C =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿ なので,

4STEP　$\boxed{282}$ をやっておくこと．