

# 円順列とネックレス順列の基本

あるものを円形に並べるとき、回転して重なるものを同じものと見なすのが「円順列」、回転および裏返ししても重なるものを同じものと見なすのが「ネックレス順列」の考え方です。

☞注 「ネックレス順列」は一般に「じゅず順列」と言われますが、僕は「じゅずじゅんれつ」とスラスラ言えないので苦手です。だから「ネックレス順列」と呼びます。

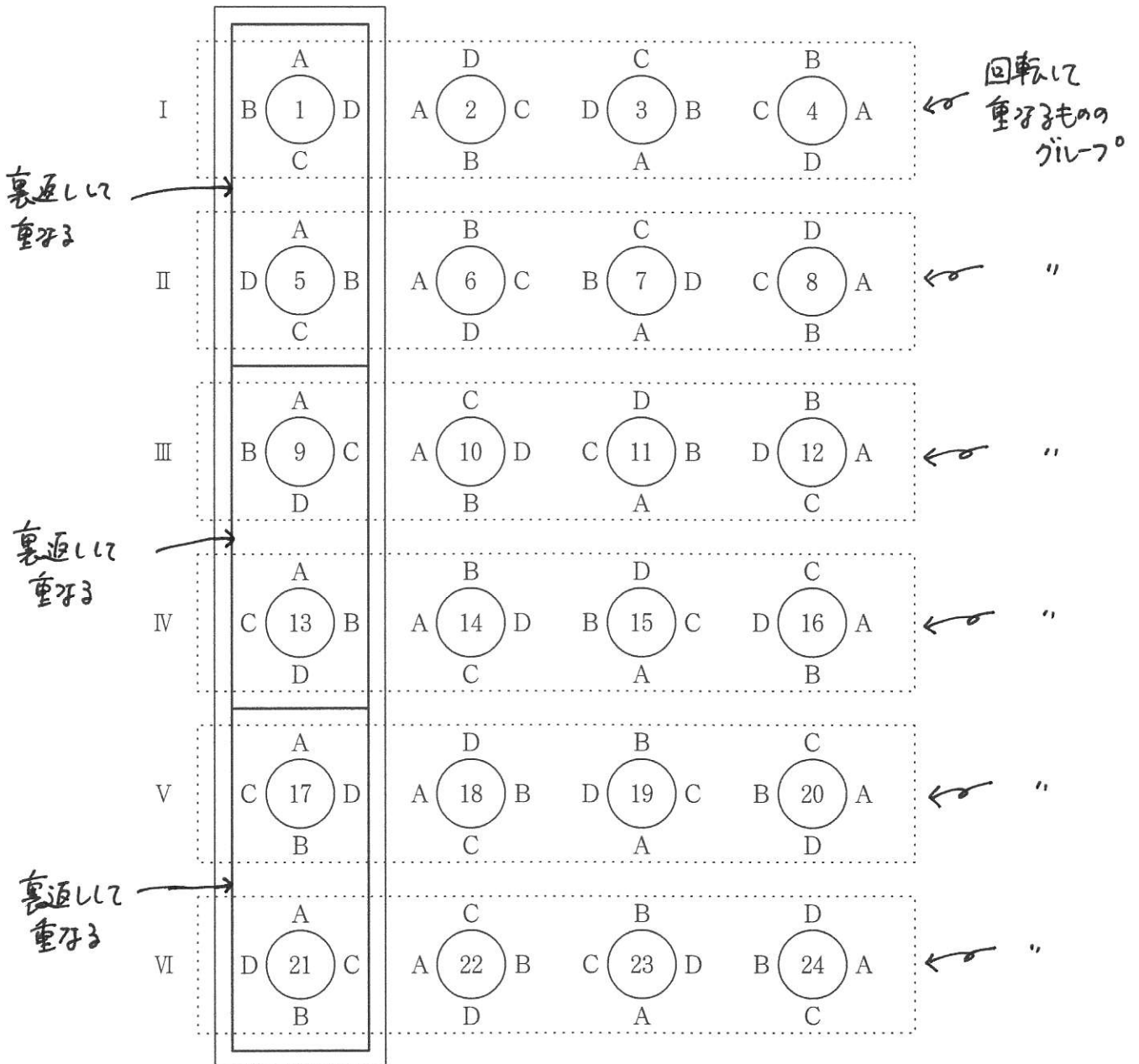
**例題** 異なる4個の玉の円順列、ネックレス順列を求めよ。

**考え方** まず最初に、回転や裏返しを無視してとにかく4個を並べてみると

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{通り}$$

あります(下図1番~24番)。これらの中から、同一視するものをまとめて考えます。

全部書き出したよ



### 1 円順列の個数

回転して重なるものを同一視するのが円順列の考え方です。

まず、何の制限もなく並べた 24 通りの中で、回転したら重なるものを点線の四角で囲ってみました。 4 通りずつあります。これらを同一視するので、いわゆる「袋詰め割り算」の発想で、4 通りずつ 1 つの袋に入れたと考えて、

$$4! \div 4 = 3 \times 2 \times 1 = \underline{6 \text{ 通り}}$$

また、次のように考えても良いでしょう。「点線の四角内の 4 通りを同じとみなす」ということは、点線の四角内から代表して 1 個ずつカウントすればよいのです。例えば時計の 12 時の位置に注目して、この場所に A があるものを選ぶと、1 番、5 番、9 番、13 番、17 番、21 番の 6 通り。これらは点線の四角から 1 個ずつ選んだこととなります (図の実線の四角部分)。また他にも、3 時の位置に B があるものを選ぶと、3 番、5 番、11 番、13 番、18 番、22 番の 6 通り。これらも点線の四角から 1 個ずつ選んでいます。

このように、ある文字を 1 個固定して数えると、自動的に点線の四角内から 1 通りずつ選んだことになるのです。したがって、1 個を固定して考えると、残りの 3 個を並べればよいから

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = \underline{6 \text{ 通り}}$$

となります。これが 4 個の円順列の個数です。

### 2 ネックレス順列の個数

ネックレス順列は、回転だけではなく裏返しも考慮して重なるものを同一視します。よって、円順列 6 通りをさらに絞込みます。

先ほどの 6 通りの円順列 (図の実線の四角部分) の中で、裏返して重なるものは、1 番と 5 番、9 番と 13 番、17 番と 21 番です (図の太線の四角部分)。2 通りずつペアになります。これらを同一視するので、「袋詰め割り算」の発想で 2 通りずつ袋に入れたと考えると、

$$6 \div 2 = \underline{3 \text{ 通り}}$$

これが 4 個のネックレス順列の個数です。

### 3 有名問題

**例題** 白玉 1 個、赤玉 2 個、青玉 4 個の円順列とネックレス順列の個数は?

#### 円順列の個数

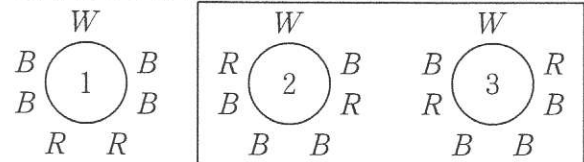
先ほどと同じように、1 個を固定して数えると自動的に回転して重なるもののグループから代表 1 通りだけ選ぶこととなります。今回の場合、白玉 1 個を固定して考えます。

そうすれば、残り赤玉 2 個、青玉 4 個を普通に並べればよいので、同じものを含む順列の考え方で  $\frac{6!}{2!4!} = \underline{15 \text{ 通り}}$  となります。

#### ネックレス順列の個数

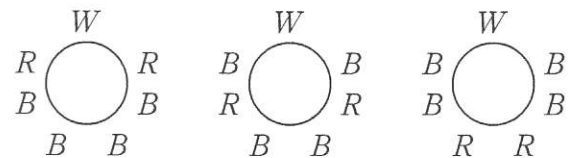
先ほど数えた円順列 15 通りを絞込みます。裏返して重なるものを同一視します。

例えば、下の 3 通りですが、1 番は裏返すと自分自身になりますが、2 番を裏返すと 3 番に一致するので、2 番と 3 番は同じものであると考えられます。



すなわち、左右対称なものは裏返しても自分自身のままですが、左右対称でないものは裏返すと別の左右対称でないものに一致します。このことから、左右対称なものは 1 通りにカウントし、左右対称でないものは 2 通りを 1 通りとカウントすればよいのです。

まず左右対称な並べ方は次の 3 通り。これらはそのままカウントします。



左右対称でない並べ方は円順列全体から左右対称な並べ方を除いて  $15 - 3 = 12$  通り。これらは 2 通りを 1 通りとカウントするので「袋詰め割り算」の発想で 2 で割ります。

よってネックレス順列の個数は  $3 + 12 \div 2 = \underline{9 \text{ 通り}}$  となります。

ヤッホーイ 完成  
首輪はキライヤけど  
ネックレスは大好き♡

7474

7474

そういう  
ことか!!

7474

ナットク