条件付き確率

2016年7月28日現在，阪神タイガースは41勝52敗です．主砲ゴメスのホームランはわずか17本．今シーズンはどのような結末が待っているのでしょうか．

さて，阪神の勝敗とゴメスのHRの関係が下の表のようであるとします (ゴメスは1試合に1本打つと考えています．あくまでも仮定の話ですが)．

	阪神が勝つ	阪神が負ける	合計
ゴメスがHRを打った	12	5	17
ゴメスがHRを打たない	29	47	76
合計	41	52	93

(1) 阪神が勝つ確率はいくらでしょうか．

(2) ゴメスがホームランを打ったときに，阪神が勝つ確率はいくらでしょうか．

まあ特に説明がなくても常識的に考えて次のような解答になるでしょう．

解 (1) 93試合中41勝なので，阪神が勝つ確率は $\frac{41}{93}$ (約44 %) である．

(2) ゴメスがホームランを打ったのは17試合で，そのうちで12勝しているので，ゴメスがホームランを打ったときに，阪神が勝つ確率は $\frac{12}{17}$ (約70 %) である．

■

(1) も (2) も同じ「阪神が勝つ確率」ですが，(2) で「ゴメスがホームランを打ったときに」という条件が付くと，「阪神が勝つ確率」が変化しています．このように，ある条件を付けて (ある条件下において) 考えた確率を『条件付き確率』といいます．

▷Point◁

事象 A が起こったときに，事象 B が起こる確率を「事象 A が起こったときに，事象 B が起こる条件付き確率」といい，記号 $P_A(B)$ で表す．

今回の場合，事象 A を「ゴメスがホームランを打つ」，事象 B を「阪神が勝つ」と定めると，

$$P(B) = \frac{41}{93}, \qquad P_A(B) = \frac{12}{17}$$

となります．$P(B)$ は「(ただ単に) 事象 B が起こる確率」のことです．

そもそも確率とは

$$\frac{\text{その場合の個数}}{\text{全事象の場合の個数}}$$

という単なる「(同様に確からしい) 場合の個数の比」に過ぎません．ここで重要になってくるのは，**全事象のイメージ**です．つまり，「全事象をどのように捉えるか」によって，結果が大きく変わってきます．『条件付き確率』とは，その全事象に条件にあるというだけのことです．

例題 1. 血液型がA型，B型のどちらかである100人を調べたところ，男子64人，女子36人で，そのうちA型の男子は40人，女子が13人である．

(1) この中から選ばれた1人が女子のとき，その人がA型である確率

(2) この中から選ばれた1人がB型のとき，その人が男子である確率

解 以下のような表ができる．

	A型	B型	合計
男子	40	24	64
女子	13	23	36
合計	53	47	100

よって，(1) は $\frac{13}{36}$，(2) は $\frac{24}{47}$ となる．

■

例 題 **2.** 白玉 8 個と赤玉 4 個が入った袋から玉を 1 個ずつ，計 2 個取り出すとき，最初の玉が白である事象を A，2 番目の玉が赤である事象を B とする．次の確率を求めよ．ただし，**取り出した玉はもとに戻さないものとする．**
(1) $P_A(B)$　(2) $P_A(\overline{B})$　(3) $P_{\overline{A}}(\overline{B})$

考え方 意味を考えれば簡単です．

(1) $P_A(B)$ とは「事象 A が起こったときに事象 B が起こる確率」のことです．まず，事象 A が起こる (つまり最初に白玉を取り出す) と袋の中は，白 7 個，赤 4 個になります．

$$\boxed{\text{白}\,8，\text{赤}\,4} \xrightarrow{\text{事象}\,A} \boxed{\text{白}\,7，\text{赤}\,4}$$

この状態で事象 B が起こる (つまりこの中から赤玉を取り出す) 確率は，$P_A(B)=\dfrac{4}{11}$ となります．

(2) $P_A(\overline{B})$ とは「事象 A が起こったときに事象 $\overline{B}$ が起こる確率」のことです．まず，事象 A が起こる (つまり最初に白玉を取り出す) と袋の中は，白 7 個，赤 4 個になります．

$$\boxed{\text{白}\,8，\text{赤}\,4} \xrightarrow{\text{事象}\,A} \boxed{\text{白}\,7，\text{赤}\,4}$$

この状態で事象 $\overline{B}$ が起こる (つまりこの中から白玉を取り出す) 確率は，$P_A(\overline{B})=\dfrac{7}{11}$ となります．

(3) $P_{\overline{A}}(\overline{B})$ とは「事象 $\overline{A}$ が起こったときに事象 $\overline{B}$ が起こる確率」のことです．ます，事象 $\overline{A}$ が起こる (つまり最初に赤玉を取り出す) と袋の中は，白 8 個，赤 3 個になります．

$$\boxed{\text{白}\,8，\text{赤}\,4} \xrightarrow{\text{事象}\,\overline{A}} \boxed{\text{白}\,8，\text{赤}\,3}$$

この状態で事象 $\overline{B}$ が起こる (つまりこの中から白玉を取り出す) 確率は，$P_A(B)=\dfrac{8}{11}$ となります．

■

このように，表を書いたり，意味を考えたりして解ける場合はとても簡単です．

1　条件付き確率の公式

一般的に考えてみよう．

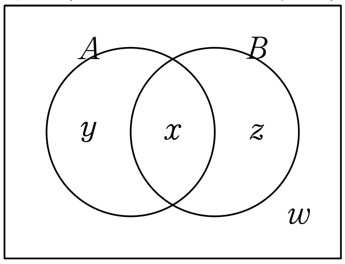
2 つの事象 A と B において，それぞれの事象が「起こる」か「起こらない」かで 4 通りの場合に分割されます．A が起こらない事象を $\overline{A}$，B が起こらない事象を $\overline{B}$ で表すと，次のようになります．

	B	$\overline{B}$
A	$A\cap B$	$A\cap\overline{B}$
$\overline{A}$	$\overline{A}\cap B$	$\overline{A}\cap\overline{B}$

それぞれの事象の場合の数が次のようになっているとします．

	B	$\overline{B}$	合計
A	x	y	$x+y$
$\overline{A}$	z	w	$z+w$
合計	$x+z$	$y+w$	$x+y+z+w$

✎**注** このような図をカルノー図といいます．ベン図で書けば下のようになります．同じことです．



このとき，事象 B が起こる確率 $P(B)$ は，全事象が $x+y+z+w$ 個なので，

$$P(B)=\frac{x+z}{x+y+z+w}$$

次に，事象 A が起こったという前提で，事象 B が起こる確率 $P_A(B)$ は，全事象を $x+y$ 個と考えるので，

$$P_A(B)=\frac{x}{x+y}$$

ここで，分母分子を $x+y+z+w$ で割って

$$P_A(B)=\frac{\dfrac{x}{x+y+z+w}}{\dfrac{x+y}{x+y+z+w}}$$

とすると，

$$\frac{x}{x+y+z+w}=P(A\cap B),$$
$$\frac{x+y}{x+y+z+w}=P(A)$$

なので，条件付き確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

となります．

▷Point◁(条件付き確率の公式)

事象 A が起こったときに，事象 B が起こる確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

である.

本来，確率は「場合の数の比」で求めるのですが，条件付き確率の場合は「条件のない確率の比」で求められるのです.

2　重要問題

例題 3.　箱 A には赤玉が 2 個，箱 B には赤玉と白玉が 1 個ずつ，箱 C には白玉が 2 個入っている．無作為に 1 つの箱を選んで玉を 1 個取り出したら赤玉であった．このとき，選んだ箱の中のもう 1 個の玉が赤玉である確率を求めよ.

考え方　2 通りの方法で考えてみます.

解 1.（条件付き確率の公式を利用）

事象 X を「無作為に 1 つの箱を選んで玉を取り出したら赤である」，事象 Y を「選んだ箱のもう 1 個も玉が赤である」とする．このとき，求める確率は条件付き確率 $P_X(Y)$ である.

$P(X)$ を求める．箱 A を選ぶと必ず赤玉を取り出し，箱 B を選ぶと確率 $\frac{1}{2}$ で赤玉を取り出し，箱 C を選ぶと赤玉は取り出されないので，

$$P(X) = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{1}{2}$$

次に $X \cap Y$ となる確率は箱 A を選ぶときなので，

$$P(X \cap Y) = \frac{1}{3}$$

したがって，求める条件付き確率は

$$P_X(Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

である.

■

解 2.（起こりうる場合を書き出して考える）

すべての玉を区別して考える．つまり，

箱 A にある赤玉を R_1，R_2，

箱 B にある赤玉を R_3，白玉を W_1，

箱 C にある白玉を W_2，W_3

と区別すると，最初に取り出した玉ともう 1 個の玉の組合せは，次の 6 通りが考えられ，，これらはすべて 同様に確からしい.

	最初の玉	もう 1 個の玉
①	R_1	R_2
②	R_2	R_1
③	R_3	W_1
④	W_1	R_3
⑤	W_2	W_3
⑥	W_3	W_2

最初の玉が赤玉であるのは，①②③ の 3 通りで，残りのもう 1 個の玉も赤玉であるのは，①② の 2 通りなので，求める条件付き確率は $\frac{2}{3}$ である.

■

注　どちらも大切な考え方なので，しっかりと理解しよう．条件付き確率の公式を利用した最初の **解** では，事象を自分で設定することがポイントです．後半の **解** は起こりうる 6 つの場合が 同様に確からしい ことが最重要です．6 つの場合が同様に確からしくなければ (つまり確率がバラバラであれば)，こんなにカンタンには解けないので注意しよう.

例題 4.　10 本のくじの中に 3 本の当たりくじが入っている．このくじの中から 1 本ずつ順に，引いたくじは戻さずに 2 本を引いたら，2 本の中に当たりくじがあることがわかった．このとき，1 本目のくじが当たりくじである確率を求めよ.

解　事象 A を「2 本の中に当たりくじがある」，事象 B を「1 本目のくじが当たりくじである」とする．このとき，求める確率は条件付き確率 $P_A(B)$ である.

$P(A)$ を求める．2 本の中に少なくとも 1 本当たりくじがあればよいので，余事象を考えると

$$P(A) = 1 - \frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9} = \frac{48}{90}$$

次に $A\cap B$ となる確率は「2 本とも当たりくじを引く」または「1 本目が当たりで 2 本目がハズレ」ときなので，

$$P(A\cap B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{27}{90}$$

したがって，求める条件付き確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{27}{90}}{\frac{48}{90}}=\frac{9}{16}$$

■

✎注　$P(A)$ を余事象を考えずに直接求めると，○○，○×，×○ の場合を考えて，

$$P(A)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{48}{90}$$

となります．

✎注　先ほどの 例題 **3.** の 解 2. を真似て，次のように解いてみましたが，答えが合いません．なぜだか分かりますか？

1 本目と 2 本目の当たり (○) とハズレ (×) の組合せは次の 4 通りある．

	1 本目	2 本目
①	○	○
②	○	×
③	×	○
④	×	×

2 本の中に当たりくじがあるのは，①②③ の 3 通りで，そのうち 1 本目が当たりくじであるのは，①② の 2 通りなので，求める条件付き確率は $\frac{2}{3}$ である．

なぜ間違ったのかもうお分かりですね．今回の①〜 ④ が**同様に確からしくないから**です．実際，
① の確率は $\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}$，② の確率は $\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}$
③ の確率は $\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}$，④ の確率は $\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}$
です．同様に確からしいわけありませんね．
でも，今回の解答式を振り返ると

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}}{\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}}$$

なので，同様に確からしくないものの，考え方としては

$$P_A(B)=\frac{\text{① の確率}+\text{② の確率}}{\text{① の確率}+\text{② の確率}+\text{③ の確率}}$$

となっていることを意識しよう．

3　補足

最後に紹介した 例題 **4.** で，例えば,，○○ と引く確率を，

$$\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\ \cdots\cdots(※)$$

と計算しましたが，特に違和感を感じなかったと思います．でも，この計算が『条件付き確率の公式』そのものであることに気付いていますか．「えっ，特に何も気にせずに 2 つの確率をかけてたわ・・・」という人が多いのではないでしょうか．

いま，事象 A を「1 本目が当たりである」，事象 B を「2 本目が当たりである」とします．

まず $P(A)=\frac{3}{10}$ です．では，1 本目が当たりである時に 2 本目が当たりである確率 $P_A(B)$ はどうなるかというと，事象 A が起こった時点で，9 本中，当たりが 2 本の状態になっているので $P_A(B)=\frac{2}{9}$ です．つまり，式 (※) は

$$P(A)\times P_A(B)$$

を計算しているに他ならず，これは『条件付き確率』の公式の両辺に $P(A)$ をかけた

$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$$

という式そのものです．この式を『確率の乗法定理』といいます．

▷Point◁(確率の乗法定理)

事象 A と事象 B が共に起こる確率 $P(A\cap B)$ は

$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$$

である．特に，事象 A と事象 B が独立であるとき，「お互いに影響を及ぼさない」ので $P(B)=P_A(B)$ だから

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

である．

これまでにも，2 つの事象の確率を (何気なく) かけてきたことがありましたが，それは 2 つの事象が独立だったからです．本来は『確率の乗法定理』で正式で，独立な場合は『確率の乗法定理』の特別な場合に過ぎません．