同じものを含む順列

例題 1. 赤玉 3 個，白玉 2 個，青玉 1 個を一列に並べる順列の総数を求めよ．

順列・組合せの問題においては，特に断りの無い限り，同色の玉や同じ数字のカードなどは区別しません．このような順列を『同じものを含む順列』といい，今後様々な場面において頻繁に登場する重要な順列です．

今回は 2 通りの考え方で求めてみたいと思います．いずれも重要な考え方なので，違いに注意して，しっかりと理解してください．

考え方 1. いったんすべての玉を区別して数えて，後でその区別をなくします．

まず，3 個の赤玉を，R_1，R_2，R_3，2 個の白玉を W_1，W_2，青玉を B_1 と区別して並べると，全部で 6 個の順列なので，$6!$ 通りあります．しかし，実際は玉の区別をしないので，この中には同じものがたくさんダブっていることになります．

例えば，赤玉を R，白玉を W，青玉を B で表すと

$$R \quad W \quad R \quad R \quad W \quad B$$

という 1 つの並べ方に，赤玉と白玉と青玉の番号をつけると，以下の 12 通りのつけかたがあります．

$$\begin{array}{ll}
R_1W_1R_2R_3W_2B_1 & R_1W_2R_2R_3W_1B_1 \\
R_1W_1R_3R_2W_2B_1 & R_1W_2R_3R_2W_1B_1 \\
R_2W_1R_1R_3W_2B_1 & R_2W_2R_1R_3W_1B_1 \\
R_2W_1R_3R_1W_2B_1 & R_2W_2R_3R_1W_1B_1 \\
R_3W_1R_1R_2W_2B_1 & R_3W_2R_1R_2W_1B_1 \\
R_3W_1R_2R_1W_2B_1 & R_3W_2R_2R_1W_1B_1
\end{array}$$

玉の区別をなくすと，これら 12 通りは全て同じ順列です（なお，この「12 通り」とは，3 個の赤玉，R_1，R_2，R_3 の順列 $3! = 6$ 通りと，2 個の白玉 W_1，W_2 の順列 $2! = 2$ 通り，1 個の青玉 B_1 の順列 $1! = 1$ 通りをかけたもの $(3! \times 2! \times 1!)$ であることは言うまでもないでしょう）．

同様に，例えば

$$R \quad W \quad R \quad W \quad B \quad R$$

という並べ方にも $3! \times 2! \times 1! = 12$ 通りの番号のつけ方があります．

したがって，玉を区別して並べた $6!$ 通りのなかで，$3! \times 2! \times 1!$ 個ずつ同じものがあるので（『袋詰め割り算』の考え方より），

$$\frac{6!}{3! \times 2! \times 1!} = 60 \text{ 通り}$$

が，求める順列の総数になります．

■

考え方 2. 6 個の玉の入る場所を

① ② ③ ④ ⑤ ⑥

とします．まず，この異なる 6 ヶ所の中から 3 ヶ所選んで赤玉を入れます．異なる 6 ヶ所の中から 3 ヶ所選ぶ方法は ${}_6\mathrm{C}_3$ 通り．赤玉 3 個は区別しないので，選んだ 3 ヶ所に赤玉を入れる方法は 1 通りしかないから，結局，赤玉の並べ方は ${}_6\mathrm{C}_3$ 通りです．

次に残っている 3 ヶ所から 2 ヶ所選んで白玉を入れます．赤玉の時と同様に，${}_3\mathrm{C}_2$ 通りの並べ方があります．最後に青玉を入れます．${}_1\mathrm{C}_1$ 通り．

したがって，

$${}_6\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_1\mathrm{C}_1 = 60 \text{ 通り}$$

が，求める順列になります．

■

注 ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ なので，

$${}_6\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_1\mathrm{C}_1 = \frac{6!}{3!3!} \times \frac{3!}{2!1!} \times \frac{1!}{1!0!} = \frac{6!}{3!2!1!}$$

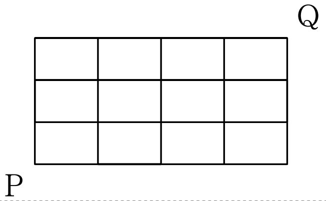
となり，結局，考え方 1. も 考え方 2. も同じことです（言うまでもなく，$0! = 1$ です）．

注 上の解答では，赤，白，青の順番に玉を並べていきましたが，他の順番でも全く同じ結果になります．

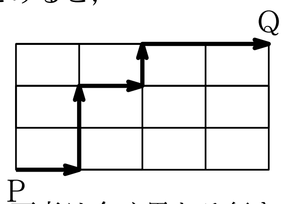
注 よく「順列の問題なのに，どうして組合せの記号 C を使うんですか」という質問をする人がいます．完全に的はずれです．そもそも記号 C は「**異なるものの中から選ぶ選び方**」のこと．今回の

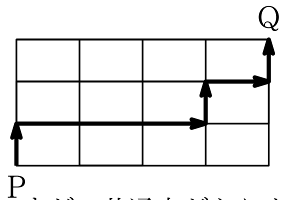
場合，玉に区別がないので，あくまでも並べる場所を区別して選んでいるのです．で，玉に区別がないので，選んだ場所に玉の並べ方が 1 通りしかないから，結果的に，「場所を選ぶこと」＝「玉を並べること」になっているのです．

例 題 2.　下のような街路で，P から Q まで行く最短経路は何通りあるか．

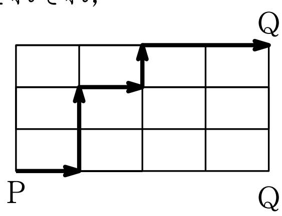


考え方　「最短経路で行く」とは，今回の場合，常に右上の方向に向かうことを意味し，下方向や左方向には進まない行き方です．試しにいくつか考えてみると，

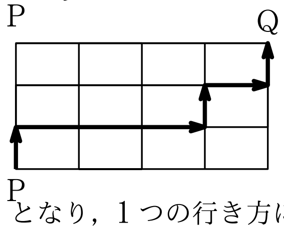




両者は全く異なる行き方ですが，共通点があります．それは**常に右に 4 回，上に 3 回進んでいる**ということです．右に進むことを「ヨ」，上に進むことを「タ」で表すことにすると，上の行き方はそれぞれ，



ヨタタヨタヨヨ



タヨヨヨタヨタ

となり，1 つの行き方に対して，「ヨ」4 個，「タ」3 個の順列が 1 つ対応していることがわかります．

つまり，求める最短経路の総数は，「ヨ」4 個，「タ」3 個の順列の個数そのものなので，同じものを含む順列の考え方により $\dfrac{7!}{4!3!}=35$ 通りとなります．

■

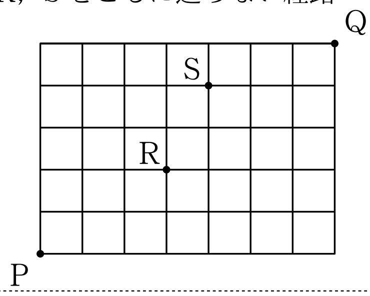
注　もちろん，${}_7C_3$ あるいは ${}_7C_4$ でもかまいません．

例 題 3.　下のような街路で，P から Q まで行く最短経路のうち，次の場合は何通りあるか．

(1) 総数　(2) R を通る経路

(3) R，S をともに通る経路

(4) R，S をともに通らない経路



解　(1) P から Q へ行く最短経路は，右に 7 回，上に 5 回の組合せで得られるので，$\dfrac{12!}{7!5!}=792$ 通り．

(2) P から R へ行く最短経路は，$\dfrac{5!}{3!2!}=10$ 通り．R から Q へ行く最短経路は，$\dfrac{7!}{4!3!}=35$ 通り．よって，$10\times35=350$ 通り．

(3) P から R へ行く最短経路は，$\dfrac{5!}{3!2!}=10$ 通り，R から S へ行く最短経路は，$\dfrac{3!}{1!2!}=3$ 通り，S から Q へ行く最短経路は，$\dfrac{4!}{3!1!}=4$ 通り．

よって，$10\times3\times4=120$ 通り．

(4) R も S も通らない経路は，総数から，R または S を通る場合を除いたものである．

S を通る経路は，$\dfrac{8!}{4!4!}\times\dfrac{4!}{3!1!}=280$ 通り．

よって，R または S を通る経路は，

$350+280-120=510$ 通り．

したがって，R も S も通らない経路は，

$792-510=282$ 通り．

■

注　「R も S も通らない経路」は，下図の斜線部分です．なので，「R も S も通らない」を「全体から『R も S も通る』場合 (図の点線部分) を除く」と考えるのは間違いです．