離散的関数の最大最小

なんか
ムズそう…
（大丈夫だよ〜）

関数 $f(x)$（x は実数）の最大最小を調べるには「微分してグラフを書く」というのが定番の手法でしたが，関数 $f(n)$（n は整数）の場合は，ちょっと無理です．整数がトビトビに存在しているからです（整数の離散性）．このような関数（離散的関数といいます）の最大最小は**理想的な状態**をイメージして考えます．

例えば，$f(1)\sim f(7)$ の中で $f(3)$ が最大だとしましょう．$f(3)$ が最大である理想的な状態は

$$f(1) < f(2) < f(3) > f(4) > f(5) > f(6) > f(7) \quad \cdots\cdots \ (※)$$

うーん．
まさに理想的

だんだん
大きくなって
だんだん
小さくなる…

です．このとき，2 項間の比と差を計算してみると，

比の値と 1 との大小比較

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{f(2)}{f(1)} > 1 \\ \dfrac{f(3)}{f(2)} > 1 \end{array}\right\} \text{1より大}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{f(4)}{f(3)} < 1 \\ \dfrac{f(5)}{f(4)} < 1 \\ \dfrac{f(6)}{f(5)} < 1 \\ \dfrac{f(7)}{f(6)} < 1 \end{array}\right\} \text{1より小}$$

1との大小が
入れかわってる
フムフム

最大値 $f(3)$ の前後で比の値が 1 より大から小に入れ代わっています．

差が正か負か

$$\left.\begin{array}{l} f(2)-f(1) > 0 \\ f(3)-f(2) > 0 \end{array}\right\} \text{正}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(4)-f(3) < 0 \\ f(5)-f(4) < 0 \\ f(6)-f(5) < 0 \\ f(7)-f(6) < 0 \end{array}\right\} \text{負}$$

正負が
入れかわってる
フムフム

最大値 $f(3)$ の前後で差が正から負に入れ代わっています．

以上のことから，比や差の入れ代わりの様子がわかれば，大小関係が分かります．つまり，今は上の大小関係（※）を見ながら比や差を調べましたが，逆に，**比や差の様子から，もとの大小関係を復元し**ていくのです．

▷Point◁（離散型関数の最大最小の求め方）

> 変数が整数である関数 $f(n)$ の最大最小を求めるには「比 $\dfrac{f(k+1)}{f(k)}$ が 1 より大か小かの境目」，または，「差 $f(k+1)-f(k)$ が正か負かの境目」に注目する．この境目で何かが起こっているので，その様子から元の大小関係を復元していく．
>
> フムフム

注 言うまでもなく，「比が 1 より大か小か」と「差が正か負か」は全く同じことです．

そりゃ
そうや

$$\frac{f(k+1)}{f(k)} > 1 \iff f(k+1) > f(k) \iff f(k+1)-f(k) > 0$$

だからです．なお，このことが言えるためには $f(k) > 0$ でなければなりませんが，ほぼ間違いなく $f(k) > 0$ なので気にする必要はありません．

注 「境目を調べれば良いのは分かるが，境目が 2 箇所以上あった場合はどうするのか」という心配があると思いますが，安心してください．私の経験上，このタイプの問題は大抵境目が 1 箇所しかありません．2 箇所以上ある入試問題は見たことがありません．

ラッキ〜 見つけるのは たった1ヵ所!!

注 比 $\dfrac{f(k+1)}{f(k)}$ を調べるか，差 $f(k+1)-f(k)$ を調べるかは問題文で指定されています．指定がなければどちらでやってもかまいません．どちらでやっても同じなので，好きな方，計算しやすい方でやってください．個人的には比を調べる方が好きです．理由は，やってみれば分かります．

それでは具体例で見ていくことにしよう．比較のために，比と差の両方で解いてみます．

はーい

解き比べ
スタート!!

例 題 1.　$(2x+y)^{10}$ の展開式における $x^{10-k}y^k$ の係数を $f(k)$ で表す．ただし，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10$ とする．$f(k)$ の最大値はいくらか．

実際に展開して調べてもいいい？

やめた方がよいでしょう

考え方　二項定理で展開すると $(2x+y)^{10}=\sum_{k=0}^{10}{}_{10}\mathrm{C}_k(2x)^{10-k}y^k$ となるので，$x^{10-k}y^k$ の係数 $f(k)$ は $f(k)={}_{10}\mathrm{C}_k\cdot 2^{10-k}$ となります．この k の関数 $f(k)$ の最大値を求めるのですが，こんな式を微分してグラフを書くなんて到底ムリなので，比 $\dfrac{f(k+1)}{f(k)}$ が 1 より大か小か，差 $f(k+1)-f(k)$ が正か負かに注目して考えます．

解（比に注目する方法）

$$\frac{f(k+1)}{f(k)}=\frac{{}_{10}\mathrm{C}_{k+1}\cdot 2^{10-(k+1)}}{{}_{10}\mathrm{C}_k\cdot 2^{10-k}}$$

重要!!

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

これに当てはめます。どんどん約分します

$$=\frac{\dfrac{10!}{(k+1)!(9-k)!}}{\dfrac{10!}{k!(10-k)!}}\cdot\frac{2^{9-k}}{2^{10-k}}$$

$$=\frac{k!(10-k)!}{(k+1)!(9-k)!}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{10-k}{k+1}\cdot\frac{1}{2}$$

ここまでシンプルになるとは!!

したがって，$\dfrac{f(k+1)}{f(k)}>1$ となるとき，

$\dfrac{10-k}{k+1}\cdot\dfrac{1}{2}>1$ より，$k<\dfrac{8}{3}$

よって，$0\leqq k\leqq 2$ のとき，$\dfrac{f(k+1)}{f(k)}>1$.

逆に，$3\leqq k\leqq 9$ のとき，$\dfrac{f(k+1)}{f(k)}<1$.

このことから，

$k=0$ のとき, $\dfrac{f(1)}{f(0)}>1\iff f(0)<f(1)$

$k=1$ のとき, $\dfrac{f(2)}{f(1)}>1\iff f(1)<f(2)$

$k=2$ のとき, $\dfrac{f(3)}{f(2)}>1\iff f(2)<f(3)$

ここで入れかわる

$k=3$ のとき, $\dfrac{f(4)}{f(3)}<1\iff f(3)>f(4)$

$k=4$ のとき, $\dfrac{f(5)}{f(4)}<1\iff f(4)>f(5)$

…………

$k=9$ のとき, $\dfrac{f(10)}{f(9)}<1\iff f(9)>f(10)$

したがって，

$f(1)<f(2)<f(3)>f(4)>f(5)>\cdots>f(10)$

復元完了

となるので，$f(3)$ が最大となる．

■

解（差に注目する方法）

共通因数を見抜けますか？

うーん

$f(k+1)-f(k)$

$={}_{10}\mathrm{C}_{k+1}\cdot 2^{10-(k+1)}-{}_{10}\mathrm{C}_k\cdot 2^{10-k}$

$=\dfrac{10!}{(k+1)!(9-k)!}\cdot 2^{9-k}-\dfrac{10!}{k!(10-k)!}\cdot 2^{10-k}$

$=\dfrac{10!\cdot 2^{9-k}}{k!(9-k)!}\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{2}{10-k}\right)$

$=\dfrac{10!\cdot 2^{9-k}}{k!(9-k)!}\left(\dfrac{(10-k)-2(k+1)}{(k+1)(10-k)}\right)$

したがって，$f(k+1)-f(k)>0$ となるとき，$(10-k)-2(k+1)>0$ より，$k<\dfrac{8}{3}$

よって，$0\leqq k\leqq 2$ のとき，$f(k+1)-f(k)>0$.

逆に，$3\leqq k\leqq 9$ のとき，$f(k+1)-f(k)<0$.

このことから，

$k=0$ のとき, $f(1)-f(0)>0\iff f(0)<f(1)$

$k=1$ のとき, $f(2)-f(1)>0\iff f(1)<f(2)$

$k=2$ のとき, $f(3)-f(2)>0\iff f(2)<f(3)$

ここで入れかわる

$k=3$ のとき, $f(4)-f(3)<0\iff f(3)>f(4)$

$k=4$ のとき, $f(5)-f(4)<0\iff f(4)>f(5)$

…………

$k=9$ のとき, $f(10)-f(9)<0\iff f(9)>f(10)$

したがって，

$f(1)<f(2)<f(3)>f(4)>f(5)>\cdots>f(10)$

復元完了

となるので，$f(3)$ が最大となる．

■

注　以上，2 つの **解** を比較してどうでしょうか．最初に述べたように，僕は比に注目するほうが好きです（皆さんもそう思いませんか）．なお，もともとの問題では，差に注目するように指示されていました．トホホ・・

やり方を強制されるのはイヤだなあ…