例題 2.　青球 6 個と赤球 n 個 ($n \geqq 2$) が入っている袋から，3 個の球を同時に取り出すとき，青球が 1 個で赤球が 2 個である確率を P_n とする．P_n を最大にする n の値を求めよ．

考え方　P_n を最初に計算しておきます．特に問題ないでしょう．

OK～

$$P_n = \frac{{}_6\mathrm{C}_1 \cdot {}_n\mathrm{C}_2}{{}_{n+6}\mathrm{C}_3} = \frac{6 \cdot \dfrac{n(n-1)}{2\cdot 1}}{\dfrac{(n+6)(n+5)(n+4)}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{18n(n-1)}{(n+6)(n+5)(n+4)}$$

となります．今度は単なる分数関数なので，微分してグラフを書いて・・・という一連の作業ができなくもありませんが，比や差に注目したほうが圧倒的に簡単です．

解（比に注目する方法）

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}$$
$$= \frac{18(n+1)n}{(n+7)(n+6)(n+5)} \cdot \frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{18n(n-1)}$$
$$= \frac{(n+1)(n+4)}{(n+7)(n-1)}$$

スッキリ～

したがって，$\dfrac{P_{n+1}}{P_n} > 1$ となるとき，

$\dfrac{(n+1)(n+4)}{(n+7)(n-1)} > 1$ より，$n < 11$

よって，$n < 11$ のとき，$\dfrac{P_{n+1}}{P_n} > 1$．

同様にして，

$n = 11$ のとき，$\dfrac{P_{n+1}}{P_n} = 1$．

注意しよう
等号成立するnが存在します

$n > 11$ のとき，$\dfrac{P_{n+1}}{P_n} < 1$．

このことから，

ということは…

$$n = 2 \text{ のとき，} \frac{P_3}{P_2} > 1 \iff P_2 < P_3$$
$$n = 3 \text{ のとき，} \frac{P_4}{P_3} > 1 \iff P_3 < P_4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n = 10 \text{ のとき，} \frac{P_{11}}{P_{10}} > 1 \iff P_{10} < P_{11}$$

ココ!!

$$n = 11 \text{ のとき，} \frac{P_{12}}{P_{11}} = 1 \iff P_{11} = P_{12}$$

そういうことか～

$$n = 12 \text{ のとき，} \frac{P_{13}}{P_{12}} < 1 \iff P_{12} > P_{13}$$
$$n = 13 \text{ のとき，} \frac{P_{14}}{P_{13}} < 1 \iff P_{13} > P_{14}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

したがって，

$$P_2 < P_3 < \cdots < P_{10} < P_{11} = P_{12} > P_{13} > P_{14} > \cdots$$

となるので，P_{11} と P_{12} が最大となる．

■

最大となるポイントが
2つあったわけです。

ふ～ん

解（差に注目する方法）

$$P_{n+1} - P_n$$
$$= \frac{18(n+1)n}{(n+7)(n+6)(n+5)} - \frac{18n(n-1)}{(n+6)(n+5)(n+4)}$$
$$= \frac{18n}{(n+5)(n+6)}\left(\frac{n+1}{n+7} - \frac{n-1}{n+4}\right)$$
$$= \frac{18n}{(n+5)(n+6)}\left(\frac{(n+1)(n+4)-(n-1)(n+7)}{(n+4)(n+7)}\right)$$

したがって，$P_{n+1} - P_n > 0$ となるとき，

$(n+1)(n+4) - (n-1)(n+7) > 0$ より，

$n < 11$

よって，$n < 11$ のとき，$P_{n+1} - P_n > 0$．

同様にして，

$n = 11$ のとき，$P_{n+1} - P_n = 0$．

左に同じく…
前の例題では
等号成立するnが
存在しなかった
わけです。

$n > 11$ のとき，$P_{n+1} - P_n < 0$．

このことから，

$$n = 2 \text{ のとき，} P_3 - P_2 > 0 \iff P_2 < P_3$$
$$n = 3 \text{ のとき，} P_4 - P_3 > 0 \iff P_3 < P_4$$

フムフム

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n = 10 \text{ のとき，} P_{11} - P_{10} > 0 \iff P_{10} < P_{11}$$
$$n = 11 \text{ のとき，} P_{12} - P_{11} = 0 \iff P_{11} = P_{12}$$
$$n = 12 \text{ のとき，} P_{13} - P_{12} < 0 \iff P_{12} > P_{13}$$
$$n = 13 \text{ のとき，} P_{14} - P_{13} < 0 \iff P_{13} > P_{14}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

したがって，

$$P_2 < P_3 < \cdots < P_{10} < P_{11} = P_{12} > P_{13} > P_{14} > \cdots$$

となるので，P_{11} と P_{12} が最大となる．

■

注　最大値をとる場所が 2 ヶ所あることに違和感を感じるかもしれませんが，このタイプの問題ではよくあることです．

そうなん？

例題 3.　赤玉3個と白玉7個が入っている袋から無作為に1個取り出し，色を確認してから袋に戻す作業を30回繰り返すとき，赤玉を何回取り出す確率が最も大きいか答えよ．

考え方　反復試行の確率です．まずは自分で確率を設定せねばなりません．30回中，赤玉を k 回取り出すとすると，白玉は $30-k$ 回取り出すので，その確率を P_k とすると，$P_k = {}_{30}\mathrm{C}_k \left(\frac{7}{10}\right)^{30-k}\left(\frac{3}{10}\right)^k$ となります．計算の流れは **例題 1** と全く同じなので，解答も簡潔に書きます．

解（比に注目する方法）

$$\frac{P_{k+1}}{P_k}$$
$$=\frac{{}_{30}\mathrm{C}_{k+1}\left(\frac{7}{10}\right)^{30-(k+1)}\left(\frac{3}{10}\right)^{k+1}}{{}_{30}\mathrm{C}_k\left(\frac{7}{10}\right)^{30-k}\left(\frac{3}{10}\right)^k}$$
$$=\frac{\frac{30!}{(k+1)!(29-k)!}}{\frac{30!}{k!(30-k)!}}\cdot\frac{\left(\frac{7}{10}\right)^{29-k}}{\left(\frac{7}{10}\right)^{30-k}}\cdot\frac{\left(\frac{3}{10}\right)^{k+1}}{\left(\frac{3}{10}\right)^k}$$
$$=\frac{k!(30-k)!}{(k+1)!(29-k)!}\cdot\frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{10}}$$
$$=\frac{30-k}{k+1}\cdot\frac{3}{7}$$

落ち着いて計算しよう。
ガンガン約分できます

したがって，$\frac{P_{k+1}}{P_k}>1$ となるとき，

$\frac{30-k}{k+1}\cdot\frac{3}{7}>1$ より，$k<\frac{83}{10}$

よって，$0\leqq k\leqq 8$ のとき，$\frac{P_{k+1}}{P_k}>1$.

逆に，$9\leqq k\leqq 29$ のとき，$\frac{P_{k+1}}{P_k}<1$.

このことから，

復元の仕方は前の2問を参照のこと

$$P_0<P_1<\cdots<P_8<P_9>P_{10}>P_{11}>\cdots>P_{30}$$

となるので，P_9 が最大となる．

■

解（差に注目する方法）

$$P_{k+1}-P_k$$
$$={}_{30}\mathrm{C}_{k+1}\left(\frac{7}{10}\right)^{30-(k+1)}\left(\frac{3}{10}\right)^{k+1}-{}_{30}\mathrm{C}_k\left(\frac{7}{10}\right)^{30-k}\left(\frac{3}{10}\right)^k$$
$$=\frac{30!}{(k+1)!(29-k)!}\left(\frac{7}{10}\right)^{29-k}\left(\frac{3}{10}\right)^{k+1}-\frac{30!}{k!(30-k)!}\left(\frac{7}{10}\right)^{30-k}\left(\frac{3}{10}\right)^k$$
$$=\frac{30!}{k!(29-k)!}\left(\frac{7}{10}\right)^{29-k}\left(\frac{3}{10}\right)^k\left(\frac{1}{k+1}\cdot\frac{3}{10}-\frac{1}{30-k}\cdot\frac{7}{10}\right)$$
$$=\frac{10!2^{9-k}}{k!(9-k)!}\left(\frac{3(30-k)-7(k+1)}{10(k+1)(30-k)}\right)$$

すごい計算…

したがって，$P_{k+1}-P_k>0$ となるとき，

$3(30-k)-7(k+1)>0$ より，$k<\frac{83}{10}$

よって，$0\leqq k\leqq 8$ のとき，$P_{k+1}-P_k>0$.

逆に，$9\leqq k\leqq 29$ のとき，$P_{k+1}-P_k<0$.

このことから，

$$P_0<P_1<\cdots<P_8<P_9>P_{10}>P_{11}>\cdots>P_{30}$$

となるので，P_9 が最大となる．

■

注　最後の大小関係を復元するあたりがかなり簡潔になっていますが，本番の試験でもこの程度で十分でしょう．

まとめ

3問とも，比に注目する解答と差に注目する解答の両方を紹介しましたが，いかがだったでしょうか．比の計算では約分をすることで式がシンプルになりますが，差を計算するには共通因数でくくり出す必要があり，この部分がちょっとややこしいです．ただ，最後の大小関係を復元するあたりは，差の計算の方がすぐに大小関係がイメージできて早いかもしれませんね．いずれにしても，どちらの方法でやるのか問題に指定されていれば，その方法に従うしかありませんが，自分で選べる場合はそれぞれの特徴を踏まえた上で選んでほしいものです．

慣れてしまえば
どうってことないよ