サイコロの目の積

サイコロを振って出た目の積が何の倍数になるのか，という問題は頻出の重要問題です．

次の問題は 1992 年の京大の入試問題です (ただし (1)(2) のみ．(3) は新たに追加)．20 年以上前に出題された問題ですが今だに色褪せずに，繰り返し出題されている重要な問題です．

例 題　サイコロをくり返し n 回振って，出た目の数を掛け合わせた積を X とする．すなわち k 回目に出た目の数を Y_k とすると，$X = Y_1 Y_2 \cdots\cdots Y_n$

(1)　X が 3 で割り切れる確率 p_n を求めよ．

(2)　X が 6 で割り切れる確率 q_n を求めよ．

(3)　X が 4 で割り切れる確率 r_n を求めよ．　　(1992 年京大前期理系改)

今回は，この問題について，じっくり考えてみよう．

1　準備

まず最初に重要事項を確認しておこう．

▷Point◁(重要事項 ①)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

場合の数や確率の問題でよく使う重要な関係式です．ベン図をイメージすれば分かるでしょう．

▷Point◁(重要事項 ②)

事象 X の起こる確率 $P(X)$ が求めにくときは余事象を考える．
つまり，事象 X の起こらない確率を $P(\overline{X})$ とすると，$P(X) = 1 - P(\overline{X})$ である．

「求めにくいときは余事象」です．問題を解くときは，「直接に求める方法」と「余事象を利用する方法」の 2 つを常に考え，計算しやすいほうを選ぶようにしよう．

2　解答

それでは京大の問題に挑戦しよう．まずは自分で事象を設定します．ベン図をイメージして，どの部分の確率を求めるのか考えよう．「求めにくいときは余事象」を合言葉に．

解

積が 2 の倍数である確率を $P(A)$
積が 3 の倍数である確率を $P(B)$
積が 4 の倍数である確率を $P(C)$
とする．

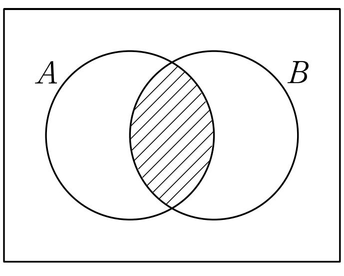
(1)　$P(B)$ を求める．

余事象 $P(\overline{B})$ を考える．$P(\overline{B})$ は積が 3 の倍数にならない確率だから，n 回とも 3 の倍数の目が出ないときなので，$P(\overline{B}) = \left(\frac{4}{6}\right)^n$．よって，

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^n$$

■

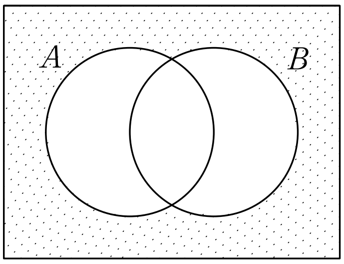
(2)　求める確率は $P(A \cap B)$ (下図の斜線部分)．



まず，$P(A)$ を求める．(1) と同様に，余事象 $P(\overline{A})$ は積が 2 の倍数にならない (つまり奇数ばかり出る) 確率なので，$P(\overline{A}) = \left(\frac{3}{6}\right)^n$．よって，

$$P(A) = 1 - \left(\frac{3}{6}\right)^n$$

次に，$P(A \cup B)$ を求める．余事象 $P(\overline{A \cup B})$ を考える (下図の点線部分)．



上図の点線部分は，積が 2 の倍数でも 3 の倍数でもない，つまり，1 と 5 の目ばかりが出る場合なので，$P(\overline{A\cup B})=\left(\frac{2}{6}\right)^n$．よって，

$$P(A\cup B)=1-\left(\frac{2}{6}\right)^n$$

したがって，

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

より，

$$\begin{aligned}&P(A\cap B)\\=&P(A)+P(B)-P(A\cup B)\\=&\left\{1-\left(\frac{4}{6}\right)^n\right\}+\left\{1-\left(\frac{3}{6}\right)^n\right\}-\left\{1-\left(\frac{2}{6}\right)^n\right\}\\=&1-\left(\frac{4}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{6}\right)^n\end{aligned}$$

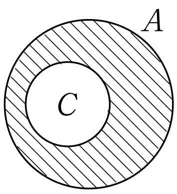
■

✏注　もし，ドモルガンの法則を知っているなら，

$$P(\overline{A\cup B})=P(\overline{A}\cap\overline{B})$$

となり，$P(A\cup B)$ の余事象 $P(\overline{A\cup B})$ が $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ に等しい，つまり「2 の倍数でも 3 の倍数でもない確率」であることが式的にも確認できます．

(3)　事象 A(2 の倍数) の中に事象 C(4 の倍数) が含まれているので，「4 の倍数になる」のは，2 の倍数の中から「2 の倍数だが 4 の倍数でないもの」を引いた場合である．



「積が 2 の倍数だが 4 の倍数でない」のは，2 か 6 の目が 1 回だけ出て，残り $n-1$ 回はすべて奇数が出る場合なので，${}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{6}\right)^1\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}$．また，$P(A)=1-\left(\frac{3}{6}\right)^n$ なので，

$$P(C)=1-\left(\frac{3}{6}\right)^n-{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{6}\right)^1\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}$$

■

✏注　$P(C)=$「$1-$(4 の倍数にならない)」といきなり余事象を考えても良いです．「4 の倍数にならない」のは「全て奇数が出る」場合と「2 と 6 が 1 回だけ出る」場合で，このことは，式で書けばハッキリします．

$$P(C)=P(A)-P(A\cap\overline{C})=1-P(\overline{A})-P(A\cap\overline{C})$$

だからです．

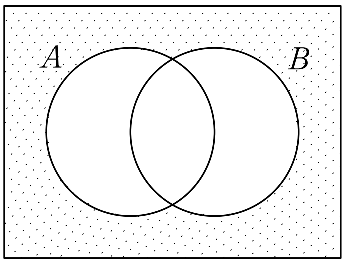
参考　(2) は，否定をメインに考えることもあります (むしろこの考え方が多い)．

別解

積が $\underline{\text{2 の倍数でない}}$ 確率を $P(A)$

積が $\underline{\text{3 の倍数でない}}$ 確率を $P(B)$

とすると，積が 6 の倍数になるのは下図の点線部分である．



つまり，$1-P(A\cup B)$ を求めればよい．

まず，$P(A\cap B)$ は，積が 2 の倍数でも 3 の倍数でもない，つまり，1 と 5 の目ばかりが出る場合なので，$P(A\cap B)=\left(\frac{2}{6}\right)^n$

また，$P(A)=\left(\frac{3}{6}\right)^n$，$P(B)=\left(\frac{4}{6}\right)^n$ なので，

$$\begin{aligned}&P(A\cup B)\\=&P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\=&\left(\frac{4}{6}\right)^n+\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n\end{aligned}$$

よって，求める確率は

$$1-P(A\cup B)=1-\left\{\left(\frac{4}{6}\right)^n+\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n\right\}$$

■

✏注　最初の解答と比較すると分かると思いますが，最初の解答では，事象を肯定で設定したものの，確率の計算をする際，全て余事象で考えていました．だったら最初から否定をメインに考えたら，いちいち余事象を考えなくてラクだろう，というわけです．