そもそも『入試数学への第一歩』って、どんな一歩やねん？　＜最終目的地へＧＯ編＞

お散歩や遠足で足腰を鍛えたら、最終目的地が見えてきました。どこまでたどり着けるか挑戦してみよう。

1 [2012 センター]

a，b を定数として 2 次関数 $y=-x^2+(2a+4)x+b$ ……① について考える。関数 ① のグラフ G の頂点の座標は $\left(a+\boxed{\text{ア}},\ a^2+\boxed{\text{イ}}a+b+\boxed{\text{ウ}}\right)$ である。

以下，この頂点が直線 $y=-4x-1$ 上にあるとする。このとき，

$b=-a^2-\boxed{\text{エ}}a-\boxed{\text{オカ}}$ である。

(1)　グラフ G が x 軸と異なる 2 点で交わるような a の値の範囲は $a<\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

また，G が x 軸の正の部分と負の部分の両方で交わるような a の値の範囲は

$-\boxed{\text{コ}}-\sqrt{\boxed{\text{サ}}}<a<-\boxed{\text{コ}}+\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ である。

(2)　関数 ① の $0\leqq x\leqq 4$ における最小値が -22 となるのは $a=\boxed{\text{シス}}$ または $a=\boxed{\text{セ}}$ のときである。また $a=\boxed{\text{セ}}$ のとき，関数 ① の $0\leqq x\leqq 4$ における最大値は $\boxed{\text{ソタチ}}$ である。

一方，$a=\boxed{\text{シス}}$ のときの ① のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{ツ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{テトナ}}$ だけ平行移動すると，$a=\boxed{\text{セ}}$ のときのグラフと一致する。

2 [2013 センター]

b を定数とするとき，x の 2 次関数 $y=x^2-2bx-\dfrac{4}{3}b+\dfrac{5}{9}$ ……① のグラフの頂点の座標は $\left(b,\ \boxed{\text{ア}}b^2-\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}b+\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\right)$ である。

(1)　a，c を定数とする。① のグラフが，関数 $y=ax^2-2x+c$ のグラフと原点に関して対称となるのは，$a=\boxed{\text{カキ}}$，$b=\boxed{\text{ク}}$，$c=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ のときである。また

$b=\boxed{\text{ク}}$ のとき，① のグラフと，関数 $y=x(x+4)$ のグラフを x 軸方向に s，y 軸方向に t だけ平行移動したグラフとが一致するのは $s=\boxed{\text{サ}}$，$t=\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ のときである。

(2)　下の $\boxed{\text{ナ}}$，$\boxed{\text{ハ}}$，$\boxed{\text{ヒ}}$ には，次の ⓪～④ のうちから当てはまるものを一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　$>$　　①　$<$　　②　$\geqq$　　③　$\leqq$　　④　$=$

$0\leqq x\leqq 1$ の範囲における関数 ① の値の最小値を m とする。

$b<0$ のとき　$m=-\dfrac{4}{3}b+\dfrac{5}{9}$

$0\leqq b\leqq 1$ のとき　$m=\boxed{\text{ア}}b^2-\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}b+\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$

$b>1$ のとき　$m=-\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}b+\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}$

である。したがって $m<0$ となる b の値の範囲は $b\ \boxed{\text{ナ}}\ \dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

また，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で ① のグラフと x 軸が異なる 2 点で交わる b の値の範囲は

$\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\ \boxed{\text{ハ}}\ b\ \boxed{\text{ヒ}}\ \dfrac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$ である。

3 [2014 センター]

a を定数とし，x の 2 次関数 $y=x^2+2ax+3a^2-6a-36$ ……① のグラフを G とする。G の頂点の座標は $\left(\boxed{\text{ア}}a,\ \boxed{\text{イ}}a^2-\boxed{\text{ウ}}a-\boxed{\text{エオ}}\right)$ である。G と y 軸との交点の y 座標を p とする。

(1)　$p=-27$ のとき，a の値は $a=\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キク}}$ である。$a=\boxed{\text{カ}}$ のときの ① のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{ケ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{コ}}$ だけ平行移動すると，$a=\boxed{\text{キク}}$ のときの ① のグラフに一致する。

(2)　下の $\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ノ}}$，$\boxed{\text{ハ}}$ には，次の ⓪ ～ ③ のうちから当てはまるものを一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　$>$　　①　$<$　　②　$\geqq$　　③　$\leqq$

G が x 軸と共有点をもつような a の値の範囲を表す不等式は

$\boxed{\text{サシ}}\ \boxed{\text{ス}}\ a\ \boxed{\text{セ}}\ \boxed{\text{ソ}}$ ……② である。a が ② の範囲にあるとき，p は，

$a=\boxed{\text{タ}}$ で最小値 $\boxed{\text{チツテ}}$ をとり，$a=\boxed{\text{ト}}$ で最大値 $\boxed{\text{ナニ}}$ をとる。

G が x 軸と共有点をもち，さらにそのすべての共有点の x 座標が -1 より大きくなるような a の値の範囲を表す不等式は $\boxed{\text{ヌネ}}\ \boxed{\text{ノ}}\ a\ \boxed{\text{ハ}}\ \dfrac{\boxed{\text{ヒフ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$ である。

4 [2011 センター]

a，b，c を定数とし，$a\neq 0$，$b\neq 0$ とする。x の 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ ……① のグラフを G とする。G が $y=-3x^2+12bx$ のグラフと同じ軸をもつとき，$a=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ ……②

となる。さらに，G が点 $(1,\ 2b-1)$ を通るとき，$c=b-\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ ……③ が成り立つ。

以下，②，③ のとき，2 次関数 ① とそのグラフ G を考える。

(1)　G と x 軸が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲は $b<\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}<b$ である。さらに，G と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲は

$\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}<b<\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

(2)　$b>0$ とする。

$0\leqq x\leqq b$ における 2 次関数 ① の最小値が $-\dfrac{1}{4}$ であるとき，$b=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

一方，$x\geqq b$ における 2 次関数 ① の最大値が 3 であるとき，$b=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

$b=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$，$b=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のときの ① のグラフをそれぞれ G_1，G_2 とする。G_1 を x 軸方向に $\boxed{\text{テ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{ト}}$ だけ平行移動すれば，G_2 と一致する。