1 （基礎の確認）

「xy 平面において，直線 $l: x+t(y-3)=0$，$m: tx-(y+3)=0$ を考える．t が実数全体を動くとき，l と m の交点はどんな図形を動くか」という問題を 3 通りの方法で解け．

解 1　おそらくベストな解法

2 直線の交点を $(X,\ Y)$ とおく．

$$\begin{cases} X+t(Y-3)=0 & \cdots ① \\ tX-(Y+3)=0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より，$tX=Y+3$.

(i) $X \neq 0$ のとき，

$t=\dfrac{Y+3}{X}$．これを，① に代入すると，

$X+\dfrac{Y+3}{X}(Y-3)=0$

$X^2+(Y+3)(Y-3)=0$

$X^2+Y^2=9 \ \cdots ③$

③ において $X=0$ とすると，$Y=\pm 3$.

よって，このとき求める交点の軌跡は円 ③ から 2 点 $(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$ を除いた図形である．

(ii) $X=0$ のとき，

② より，$Y=-3$.

$X=0$，$Y=-3$ を ① に代入すると，$t=0$.

すなわち，点 $(0,\ -3)$ は $t=0$ のときの 2 直線の交点である．

(i)(ii) より，交点の軌跡は，円 $x^2+y^2=9$ から点 $(0,\ 3)$ を除いた図形である．

■

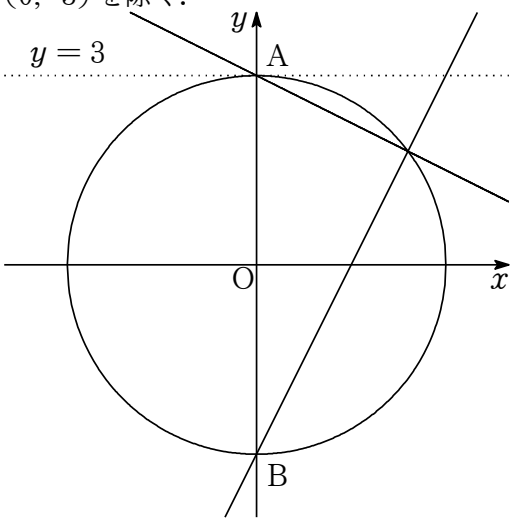
注　(i) では，$X \neq 0$ なので，円上の 2 点 $(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$ を除いていますが，(ii) の考察で，点 $(0,\ -3)$ は $t=0$ のときの交点として確かに存在することがわかったので，最終的に，点 $(0,\ -3)$ は軌跡に含め，点 $(0,\ 3)$ は除外したままになるのです．

解 2　図形的に考える方法

直線 $l: x+t(y-3)=0$ は，t の値に関わらず点 $\mathrm{A}(0,\ 3)$ を通り，直線 $m: tx-(y+3)=0$ は，t の値に関わらず点 $\mathrm{B}(0,\ -3)$ を通っている．

また，直線 l の方向ベクトルは $(-t,\ 1)$，直線 m の方向ベクトルは $(1,\ t)$ であり，これら 2 つのベクトルは内積の値が 0 になるので，直線 l と m は直交する．つまり，A を通る直線 l と B を通る直線 m が常に直交するように変化するので，交点の軌跡は，2 点 A，B を直径の両端とする円である．

ただし，l は直線 $y=3$ を，m は直線 $x=0$ を表すことができないから，この 2 直線の交点 $(0,\ 3)$ を除く．



■

注　2 直線が常に直交しながら変化することを，円周角の性質にうまく結びつけています．ほとんど計算することなしに図形的な考察だけで，軌跡を求めていますが，軌跡の限界（「点 $(0,\ 3)$ を除く」こと）がちょっと分かりづらいかもしれません（ていうか，そもそも気がつかないかもしれません）．なので，考え方としては面白いものの，きちんと処理するには最初の **解 1** の方が良いかもしれませんね．

解 3　まじめに交点を求める方法

2 直線の交点を $(X,\ Y)$ とおく．

$$\begin{cases} X+t(Y-3)=0 & \cdots ① \\ tX-(Y+3)=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$X=t(3-Y)$．これを ② に代入．

$t^2(3-Y)-(Y+3)=0$

$(t^2+1)Y=3(t^2-1)$．

$\therefore\ Y=\dfrac{3(t^2-1)}{t^2+1}\quad\cdots ③$

よって，

$X=t\left(3-\dfrac{3(t^2-1)}{t^2+1}\right)=\dfrac{6t}{t^2+1}\quad\cdots ④$

③，④ より t を消去すればよい．

$$\begin{aligned} X^2+Y^2&=\left(\frac{6t}{t^2+1}\right)^2+\left(\frac{3(t^2-1)}{t^2+1}\right)^2 \\ &=\frac{36t^2+9t^4-18t^2+9}{(t^2+1)^2} \\ &=\frac{9(t^4+2t^2+1)}{(t^2+1)^2} \\ &=\frac{9(t^2+1)^2}{(t^2+1)^2} \\ &=9 \end{aligned}$$

$$\therefore\quad X^2+Y^2=9$$

次に，t がすべての実数を変化するときに X，Y の取りうる値の範囲を調べる．

④ より，$t=0$ のとき，$X=0$

$t\neq 0$ のとき，$X=\dfrac{6}{t+\dfrac{1}{t}}$

$t>0$ のとき，相加相乗平均の大小関係より

$t+\dfrac{1}{t}\geqq 2$

$t<0$ のとき，相加相乗平均の大小関係より

$-t+\dfrac{1}{-t}\geqq 2$，つまり，$t+\dfrac{1}{t}\leqq -2$

$\therefore\quad t+\dfrac{1}{t}\leqq -2,\ 2\leqq t+\dfrac{1}{t}$

$-\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{1}{t+\dfrac{1}{t}}\leqq\dfrac{1}{2}$

よって，$-3\leqq X\leqq 3$.

これは $t=0$ の場合も含んでいるので，最終的に X の範囲は

$$-3\leqq X\leqq 3$$

③ より，

$$Y=3\left(\frac{t^2+1-2}{t^2+1}\right)=3\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)=3-\frac{6}{t^2+1}$$

ここで，$t^2+1\geqq 1$ なので，$-3\leqq Y<3$

よって，交点の軌跡は，円 $x^2+y^2=9$ から点 $(0,\ 3)$ を除いた図形である．

■

注　実際に交点を t で表した解答です．

まず，$X^2+Y^2=9$ になることに気付くかどうか．気付いたとして，X と Y の範囲を正確に求められるかどうか．いずれにしてもなかなか厳しい方法です．このように，交点を媒介変数で表してから，消去しようとするとかえって困難な場合があります．

「こんなん思いつくはずない」とキレそうになりますが，実はこれには背景があります．

参考

$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$（$-\pi<\theta<\pi$）とするとき，

$$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

と表せる．このとき，$-\pi<\theta<\pi$ より，

$$-1\leqq\sin\theta\leqq 1$$

$$-1<\cos\theta\leqq 1$$

つまり，今回の場合，

④ より，$\dfrac{X}{3}=\dfrac{2t}{t^2+1}$

③ より，$\dfrac{Y}{3}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$

となるので，$\dfrac{X}{3}$ が $\sin\theta$，$\dfrac{Y}{3}$ が $-\cos\theta$ だったわけです．なので，

$\left(\dfrac{X}{3}\right)^2+\left(\dfrac{Y}{3}\right)^2=1$ より，$X^2+Y^2=9$，

$-3\leqq X\leqq 3$，$-3\leqq Y<3$

になるのは当然のことなのです．

なお，X と Y の範囲は，数学 Ⅲ を学習していれば，t の関数

$$X=\frac{6t}{t^2+1}\qquad Y=\frac{3(t^2-1)}{t^2+1}$$

のグラフを考えたほうが手っ取り早いと思います（画面上で紹介します）．

2 (2013 年　第 2 回駿台模試)

2 点 A$(-1,\ 0)$，B$(2,\ 0)$ に対して，AP : BP $= 2:1$ であるような点 P の軌跡を C とする．次の問いに答えよ．

(1) 軌跡 C の方程式を求めよ．

(2) 点 A を通る直線 $l: y = m(x+1)$ と軌跡 C が異なる 2 点 Q，R で交わるような m の値の範囲を求めよ．

(3) m が (2) で求めた値の範囲を動くとき，弦 QR の中点 M の軌跡を求め，図示せよ．

解

(1) P$(X,\ Y)$ とすると，

$\mathrm{AP} = \sqrt{(X+1)^2+Y^2}$,

$\mathrm{BP} = \sqrt{(X-2)^2+Y^2}$

AP : BP $= 2:1$ より，AP $=$ 2BP

$\sqrt{(X+1)^2+Y^2} = 2\sqrt{(X-2)^2+Y^2}$

$(X+1)^2+Y^2 = 4(X-2)^2+4Y^2$

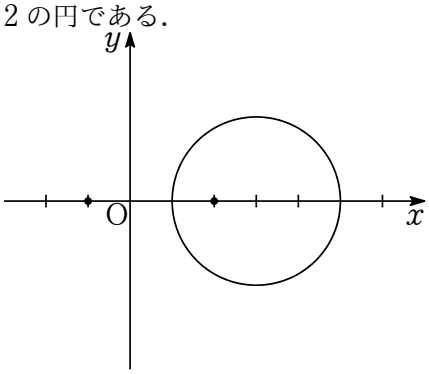
$X^2+2X+1+Y^2 = 4X^2-16X+16+4Y^2$

$3X^2-18X+3Y^2+15=0$

$X^2-6X+Y^2+5=0$

$(X-3)^2+Y^2=4$

したがって，点 P の軌跡は，中心 $(3,\ 0)$，半径 2 の円である．



■

(2) $(x-3)^2+y^2=4$ と $y=m(x+1)$ から y を消去すると，

$(x-3)^2+m^2(x+1)^2=4$

$x^2-6x+9+m^2(x^2+2x+1)=4$

$(m^2+1)x^2+(2m^2-6)x+m^2+5=0$

したがって，この x についての 2 次方程式は異なる 2 つの実数解を持てばよいので，判別式を D とすると，

$$D>0$$

よって，

$(m^2-3)^2-(m^2+1)(m^2+5)>0$

$m^4-6m^2+9-(m^4+6m^2+5)>0$

$-12m^2+4>0$

$m^2-\dfrac{1}{3}<0$

$\therefore\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}<m<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

別解 円の中心 $(3,\ 0)$ と直線 l との距離が，半径よりも小さければよいので，

$$\frac{|4m|}{\sqrt{m^2+1}}<2$$

両辺は正であるので，2 乗して整理すると，

$|4m|<2\sqrt{m^2+1}$

$16m^2<4m^2+4$

$m^2<\dfrac{1}{3}$　　$\therefore\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}<m<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

■

(3) $(x-3)^2+y^2=4$ と $y=m(x+1)$ から y を消去すると，

$(x-3)^2+m^2(x+1)^2=4$

$x^2-6x+9+m^2(x^2+2x+1)=4$

$(m^2+1)x^2+(2m^2-6)x+m^2+5=0$

この 2 次方程式の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とおくと，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{2(m^2-3)}{m^2+1}$$

弦 QR の中点 M を $(X,\ Y)$ とおくと，

$$\begin{cases} X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-\dfrac{m^2-3}{m^2+1} & \cdots① \\ Y=m(X+1) & \cdots② \end{cases}$$

① より，$(m^2+1)X=-m^2+3$

$m^2(X+1)=3-X$

$X=-1$ のとき，点 M は円の外部にあるので不適．

よって，$X \neq -1$ であるから，$m^2 = \dfrac{3-X}{X+1}$ …①′

② より，$x \neq -1$ であるから $m = \dfrac{Y}{X+1}$ とし，①′ に代入すると，

$$\left(\frac{Y}{X+1}\right)^2 = \frac{3-X}{X+1}$$

$$Y^2 = (3-X)(X+1)$$

$$Y^2 = -X^2 + 2X + 3$$

$$X^2 - 2X + Y^2 - 3 = 0$$

$$(X-1)^2 + Y^2 = 4$$

さらに，① より，$X = -1 + \dfrac{4}{m^2+1}$

また (2) より，$0 \leqq m^2 < \dfrac{1}{3}$ だから，

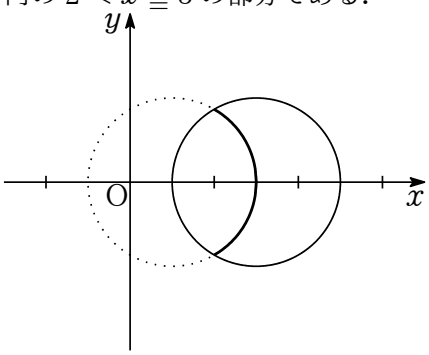
$$1 \leqq m^2 + 1 < \frac{4}{3}$$

$$\frac{3}{4} < \frac{1}{m^2+1} \leqq 1$$

$$3 < \frac{4}{m^2+1} \leqq 4$$

したがって，$2 < X \leqq 3$

よって，求める軌跡は，中心 (1，0)，半径 2 の円の $2 < x \leqq 3$ の部分である．



■

注　中点 M の座標を m で表すと，① を ② に代入して，

$$\begin{cases} X = -\dfrac{m^2-3}{m^2+1} \\ Y = \dfrac{4m}{m^2+1} \end{cases}$$

となります．ここから，m を消去して X と Y の関係式を作るのは至難の業です．

別解

(1)　求める軌跡はアポロニウスの円である．

つまり，線分 AB を 2 : 1 に内分する点 (1，0) と，2 : 1 に外分する点 (5，0) を直径の両端とする円になる．

よって，求める軌跡は中心 (3，0)，半径 2 の円である．

(2)　略

(3)　円の中心 C と弦 QR の中点 M を結ぶと，

$$\mathrm{CM} \perp \mathrm{AM}$$

つまり，点 M は，$\angle \mathrm{AMC} = 90^\circ$ を満たしつつ変化する．

したがって，M は AC を直径とする円周上にある．

よって，求める軌跡は，AC を直径とする円周上で，かつ，円 C の内部である．

■