中学３年　女子英数　冬のセミナー　　整数問題特有の考え方に慣れよう！　「整数問題ってめっちゃ面白いやん！」

３学期に学習した整数問題の内容を振り返りながら、その一歩先の美しい世界を垣間見よう。テーマは以下の通り。
$\boxed{1}$～$\boxed{4}$　１次不定方程式、$\boxed{5}$～$\boxed{9}$　倍数の証明、　$\boxed{10}$～$\boxed{11}$　平方数の分類、
$\boxed{12}$～$\boxed{17}$　素数の問題、　$\boxed{18}$～$\boxed{24}$　整数を求める問題、　$\boxed{25}$～$\boxed{30}$　互いに素
基礎、標準、応用に分かれているので、自分のレベルにあった問題を演習しよう。

$\boxed{1}$ [2011 広島工業大]基礎

$n+5$ が 7 の倍数で，$n+7$ が 5 の倍数である自然数 n のうちで，最小のものを求めよ。

$\boxed{2}$ [2015 名城大]基礎

(1) 71 と 33 が互いに素であることを示せ。

(2) $71x-33y=1$ を満たす整数 x，y の組を 1 つ求めよ。

(3) 71 で割ると 2 余り，33 で割ると 7 余る自然数のうち，4 桁で最小のものを求めよ。

$\boxed{3}$ [2016 岩手大]応用

(1) ユークリッドの互除法を用いて，89 と 29 の最大公約数を求めよ。

(2) 2 元 1 次不定方程式 $89x+29y=1$ の整数解を 1 組求めよ。

(3) 2 元 1 次不定方程式 $89x+29y=-20$ の整数解として現れる x の値のうち，正のものを小さい順に x_1，x_2，x_3，…… とする。このとき，自然数 m に対して，x_m を m で表せ。

$\boxed{4}$ [2013 鳥取大]応用

方程式 $7x+13y=1111$ を満たす自然数 x，y に対して，次の問いに答えよ。

(1) この方程式を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ はいくつあるか求めよ。

(2) $s=-x+2y$ とするとき，s の最大値と最小値を求めよ。

(3) $t=|2x-5y|$ とするとき，t の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{5}$ [2007 千葉大]基礎

n を奇数とする。次の問いに答えよ。

(1) n^2-1 は 8 の倍数であることを証明せよ。

(2) n^5-n は 3 の倍数であることを証明せよ。

(3) n^5-n は 120 の倍数であることを証明せよ。

$\boxed{6}$ [2009 宮崎大]基礎

n が 3 以上の奇数のとき，n^3-n は 24 で割り切れることを示せ。

$\boxed{7}$ [2016 学習院大]基礎

すべての自然数 n に対して $\dfrac{n^3}{6}-\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{4n}{3}$ は整数であることを証明せよ。

$\boxed{8}$ [1998 ノートルダム清心女子大]標準

自然数 P が 2 でも 3 でも割り切れないとき，P^2-1 が 24 で割り切れることを証明せよ.

$\boxed{9}$ [2010 神戸大]応用

a，b を自然数とする。

(1) ab が 3 の倍数であるとき，a または b は 3 の倍数であることを示せ。

(2) $a+b$ と ab がともに 3 の倍数であるとき，a と b はともに 3 の倍数であることを示せ。

(3) $a+b$ と a^2+b^2 がともに 3 の倍数であるとき，a と b はともに 3 の倍数であることを示せ。

中学３年　女子英数　冬のセミナー　　整数問題特有の考え方に慣れよう！　「整数問題ってめっちゃ面白いやん！」

３学期に学習した整数問題の内容を振り返りながら、その一歩先の美しい世界を垣間見よう。テーマは以下の通り。
$\boxed{1}$～$\boxed{4}$　１次不定方程式、$\boxed{5}$～$\boxed{9}$　倍数の証明、　$\boxed{10}$～$\boxed{11}$　平方数の分類、
$\boxed{12}$～$\boxed{17}$　素数の問題、　$\boxed{18}$～$\boxed{24}$　整数を求める問題、　$\boxed{25}$～$\boxed{30}$　互いに素
基礎、標準、応用に分かれているので、自分のレベルにあった問題を演習しよう。

$\boxed{10}$ [2000 滋賀大]標準

(1)　n を自然数とするとき，n^2 は 3 の倍数かまたは 3 で割った余りが 1 であることを証明せよ.

(2)　自然数 a，b，c が $a^2+b^2=c^2$ を満たすとき，a，b のうち少なくとも 1 つは 3 の倍数であることを証明せよ.

$\boxed{11}$ [2013 早稲田大]標準

自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ が等式 $x^2+y^2=z^2$ を満たすとする。

(1)　すべての自然数 n について，n^2 を 4 で割ったときの余りは 0 か 1 のいずれかであることを示せ。

(2)　x と y の少なくとも一方が偶数であることを示せ。

(3)　x が偶数，y が奇数であるとする。このとき，x が 4 の倍数であることを示せ。

$\boxed{12}$ 基礎

$4n^2-23n+33$ が素数となる整数 n の値をすべて求めよ。

$\boxed{13}$ [2004 宮崎大]基礎

n を 2 以上の自然数とするとき，n^4+4 は素数にならないことを示せ.

$\boxed{14}$ [2004 弘前大]基礎

3 より大きな素数 p について，p^2 を12 で割ったときの余りがどうなるかを調べたい.

(1)　$p=5,\ 7,\ 11$ に対して，p^2 を 12 で割ったときの余りを求めよ.

(2)　(1) の結果から，一般に 3 より大きな素数 p に対して，p^2 を 12 で割ったときの余りがどうなるかを予想し，さらにその予想が正しいことを証明せよ.

$\boxed{15}$ [2004 早稲田大]標準

n を自然数とする．n，$n+2$，$n+4$ がすべて素数であるのは $n=3$ の場合だけであることを示せ.

$\boxed{16}$ [2006 京都大]標準

2 以上の自然数 n に対し，n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ。

$\boxed{17}$ [2005 一橋大]応用

(1)　p，$2p+1$，$4p+1$ がいずれも素数であるような p をすべて求めよ。

(2)　q，$2q+1$，$4q-1$，$6q-1$，$8q+1$ がいずれも素数であるような q をすべて求めよ。

中学３年　女子英数　冬のセミナー　　整数問題特有の考え方に慣れよう！　「整数問題ってめっちゃ面白いやん！」

３学期に学習した整数問題の内容を振り返りながら、その一歩先の美しい世界を垣間見よう。テーマは以下の通り。
$\boxed{1}$～$\boxed{4}$　１次不定方程式、$\boxed{5}$～$\boxed{9}$　倍数の証明、　$\boxed{10}$～$\boxed{11}$　平方数の分類、
$\boxed{12}$～$\boxed{17}$　素数の問題、　$\boxed{18}$～$\boxed{24}$　整数を求める問題、　$\boxed{25}$～$\boxed{30}$　互いに素
基礎、標準、応用に分かれているので、自分のレベルにあった問題を演習しよう。

$\boxed{18}$ [2012 広島工業大]基礎

等式 $x^2-y^2+x-y=10$ を満たす自然数 x，y の組を求めよ。

$\boxed{19}$ [2012 上智大]基礎

$xy=4x-y+28$ を満たす正の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ は全部で何組あるか。

$\boxed{20}$ [2007 神戸薬科大]標準

2 次方程式 $x^2+(2m+5)x+(m+3)=0$ が整数の解をもつための整数 m の値をすべて求めよ。

$\boxed{21}$ 基礎

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$ となる自然数の組 $(x,\ y)$ で $x \geqq y$ を満たすものをすべてあげよ。

$\boxed{22}$ 基礎

自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ で，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$，$x<y<z$ を満たすものを求めよ。

$\boxed{23}$ [2002 同志社大]標準

$0<x \leqq y \leqq z$ である整数 x，y，z について

(1)　$xyz+x+y+z=xy+yz+zx+5$ を満たす整数 x，y，z をすべて求めよ.

(2)　$xyz=x+y+z$ を満たす整数 x，y，z をすべて求めよ.

$\boxed{24}$ [2006 東京大]応用

n を正の整数とする。実数 x，y，z に対する方程式

$$x^n+y^n+z^n=xyz \quad \cdots\cdots ①$$

を考える。

(1)　$n=1$ のとき，① を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で，$x \leqq y \leqq z$ となるものをすべて求めよ。

(2)　$n=3$ のとき，① を満たす正の実数の組 $(x,\ y,\ z)$ は存在しないことを示せ。

$\boxed{25}$ [2015 広島修道大]基礎

n を自然数とするとき，$2n-1$ と $2n+1$ は互いに素であることを示せ。

$\boxed{26}$ 基礎

$9n+3$，$7n+2$ が互いに素となるような 50 以下の自然数 n の個数を求めよ。

$\boxed{27}$ 基礎

n を自然数とする。$2n^2+n+4$ と $n+2$ の最大公約数として考えられる数をすべて答えよ。

$\boxed{28}$ [2000 大阪市立大]標準

(1)　自然数 a，b，c，d に $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{a}+d$ の関係があるとき，a と c が互いに素ならば，a と b も互いに素であることを証明せよ.

(2)　任意の自然数 n に対し，$28n+5$ と $21n+4$ は互いに素であることを証明せよ.

$\boxed{29}$ [2009 千葉大]応用

自然数 a，b，c，d は $c=4a+7b$，$d=3a+4b$ を満たしているものとする。

(1)　$c+3d$ が 5 の倍数ならば $2a+b$ も 5 の倍数であることを示せ。

(2)　a と b が互いに素で，c と d がどちらも素数 p の倍数ならば，$p=5$ であることを示せ。ただし，2 つの自然数が互いに素とは，1 以外の正の公約数をもたないことをいう。

$\boxed{30}$ 応用

2 つの正の整数 a と b が互いに素ならば，$a+b$ と ab は互いに素である。これを利用して，和が 546 で最小公倍数が 1512 である 2 つの正の整数を求めよ。