春セミ　　難関大学への記述対策　（図形編）

1～7　図形問題全般　　8～11　通過領域　　12～17　空間図形　　18～20　円と直線の位置関係

1 [2007 愛知教育大]基本　軽く肩慣らし

座標平面上に点 A$(1,\ 0)$ を固定し，点 P を直線 $x+y=2$ 上に，点 Q を円 $x^2+y^2=1$ 上にそれぞれとる。このとき，線分の長さの和 AP＋PQ の最小値と，そのときの点 P, Q の座標を求めよ。

2 [2011 旭川医科大]基本　これぞザ･平面図形

△ABC は AB＝AC の二等辺三角形とする。D を辺 BC 上の点とし，AD の延長線が △ABC の外接円と交わる点を P とする。

(1)　AP＝BP＋CP であるとき，△ABC は正三角形であることを示せ。

(2)　$\dfrac{1}{\mathrm{BP}}+\dfrac{1}{\mathrm{CP}}=\dfrac{1}{\mathrm{DP}}$ であるとき，△ABC は正三角形であることを示せ。

3 [2011 東京大]基本　これが東大？？？

座標平面において，点 P$(0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。a を $0<a<1$ を満たす実数とし，直線 $y=a(x+1)$ と C との交点を Q，R とする。

(1)　△PQR の面積 $S(a)$ を求めよ。

(2)　a が $0<a<1$ の範囲を動くとき，$S(a)$ が最大となる a を求めよ。

4 [2012 東京大]基本　マ～ジ～で～？これも東大？

実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 O$(0,\ 0)$，A$(0,\ 1)$，B$(1,\ 0)$，C$(t,\ 0)$ を考える。また線分 AB 上の点 D を ∠ACO＝∠BCD となるように定める。t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ。

5 [2008 東京大]基本　東大ばっかり飽きた～

座標平面上の 3 点 A$(1,\ 0)$，B$(-1,\ 0)$，C$(0,\ -1)$ に対し，∠APC＝∠BPC を満たす点 P の軌跡を求めよ。ただし P≠A，B，C とする。

6 [2016 名古屋大]標準　つまり何を言えばよいのかな

曲線 $y=x^2$ 上に 2 点 A$(-1,\ 1)$，B$(b,\ b^2)$ をとる。ただし $b>-1$ とする。
このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ。

条件：$y=x^2$ 上の点 T$(t,\ t^2)$ $(-1<t<b)$ で，∠ATB が直角になるものが存在する。

7 [2011 京都大]応用　シンプルすぎて言葉も出ません

空間内に四面体 ABCD を考える。このとき，4 つの頂点 A，B，C，D を同時に通る球面が存在することを示せ。

1～ 7　図形問題全般　　8～11　通過領域　　12～17　空間図形　　18～20　円と直線の位置関係

8 [1997 倉敷芸術科学大]基本

円 $x^2+y^2-2tx-2(1-t)y=0$ がある．t が実数全体を動くとき

(1)　この円の中心の軌跡を求めよ．

(2)　この円の円周の通りえない点全体の集合を求めよ

9 [2009 横浜国立大]標準

放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ をとる。

(1)　t がすべての実数を動くとき，直線 PQ が通過する領域を図示せよ。

(2)　t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過する領域を図示せよ。

10 [2002 神戸大]標準

実数 t に対して，xy 平面上の直線 $(1-t^2)x-2ty=1+t^2$ は，t の値によらずある円 C に接しているものとする．

(1)　円 C の方程式を求めよ．また，接点の座標を求めよ．

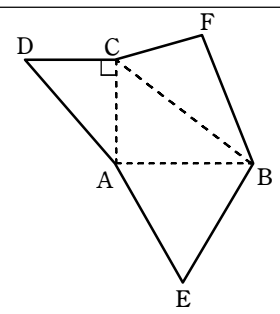
(2)　t が $t\geqq 1$ の範囲を動くとき，直線の通過する範囲を図示せよ．

11 [2013 一橋大]標準

平面上に，原点 O，点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，点 $\mathrm{B}(0,\ 1)$ を頂点とする △OAB がある。辺 OA 上の動点 P と，辺 OB 上の動点 Q は，線分 PQ が △OAB の面積を 2 等分するように動く。線分 PQ が通る点の全体からなる領域を図示せよ。

12 [2009 北海道大]標準

図はある三角錐 V の展開図である。ここで $\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{AC}=3$，$\mathrm{BC}=5$，$\angle\mathrm{ACD}=90^\circ$ で △ABE は正三角形である。このとき，V の体積を求めよ。



13 [1998 東京大]標準

xyz 空間に 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ \sqrt{3},\ 0)$ をとる．△ABC を 1 つの面とし，$z\geqq 0$ の部分に含まれる正四面体 ABCD をとる．更に △ABD を 1 つの面とし，点 C と異なる点 E をもう 1 つの頂点とする正四面体 ABDE をとる．

(1)　点 E の座標を求めよ．

(2)　正四面体 ABDE の $y\leqq 0$ の部分の体積を求めよ．

14 [2001 東京大]標準

半径 r の球面上に 4 点 A，B，C，D がある．四面体 ABCD の各辺の長さは，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$，$\mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=2$ を満たしている．このとき r の値を求めよ．

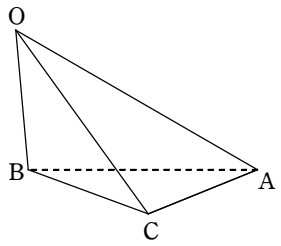
15 [1999 京都大]標準　※有名問題

△ABC は鋭角三角形とする．このとき，各面すべてが △ABC と合同な四面体が存在することを示せ．

16 [2016 慶応義塾大]応用

四面体 OABC の 4 つの面はすべて合同で，$OA=\sqrt{10}$，$OB=2$，$OC=3$ であるとする。このとき，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ア□ であり，三角形 ABC の面積は イ□ である。いま，3 点 A，B，C を通る平面を α とし，点 O から平面 α に垂線 OH を下ろす。$\overrightarrow{AH}$ は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて $\overrightarrow{AH}=$ ウ□ と表される。また，四面体 OABC の体積は エ□ である。次に，線分 AH と線分 BC の交点を P，点 P から線分 AC に下ろした垂線を PQ とすると，PQ の長さは オ□ である。また，2 点 P，Q を通り平面 α に垂直な平面による四面体 OABC の切り口の面積は カ□ である。



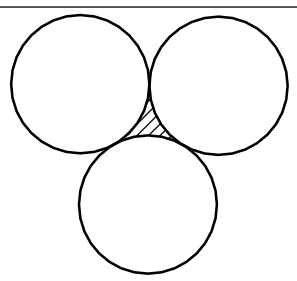
17 [2007 東京電機大]応用

(1)　半径 1 の円 3 個が，図のように互いに外接している。このとき，この 3 個の円で囲まれた領域 (斜線部分) の面積を求めよ。

(2)　平面上に，半径 1 の球 3 個を互いに外接するように固定して置き，更にその上に半径 r の球を下の 3 個のいずれとも外接するようにのせたい。この球が平面上に落ちないようにするには，r をいくらより大きくすればよいか。

(3)　(2) のとき，のせた球の中心の平面からの高さを求めよ。

(4)　(2) のとき，4 つの球が同一平面に接するような r の値を求めよ。



18 [2003 立命館大]基本

xy 平面上に 2 つの図形 円 O：$x^2+(y-1)^2=r^2$ $(r>0)$ と放物線 C：$y=ax^2$ $(a>0)$ がある．

(1)　円 O と放物線 C の共有点が 1 個になる条件は，$r=$ ア□，イ□ $<a\leqq$ ウ□ である．

(2)　円 O と放物線 C の共有点が 3 個になる条件は，$r=$ エ□，$a>$ オ□ である．

(3)　(2) の共有点を P，Q，R とし，三角形 PQR の面積を S とすると，a を用いて $S=$ カ□ となる．

19 [2002 慶応義塾大]標準

2 つの曲線 $x^2+(y-a)^2=1$，$y=bx^2$ を考える．a，b は実数で $a\geqq-10$，$b>0$ とする．a を -10 から増やしていくと，2 つの曲線の共有点の数は 0，1，ア□，イ□，ウ□，エ□，0 と変化する場合と，0，1，オ□，カ□，0 と変化する場合がある．前者は $b>$ キ□ の場合である．2 つの曲線が 2 点で接するとき a，b は ク□ b^2- ケ□ $ab+1=0$ を満たす．ただし，2 つの曲線がある点で接するとは，その点を接点とする共通の接線をもつことである．また共有点が 3 点であり，その 3 点を結ぶと正三角形ができるとき $a=$ コ□，$b=$ サ□ である．

20 [2015 大阪市立大]応用

a，b は実数で $a>0$ とする。円 $x^2+y^2=1$ と放物線 $y=ax^2+b$ の共有点の個数を m とおく。

(1)　$m=2$ となるための a，b に関する必要十分条件を求めよ。

(2)　$m=3$ となるための a，b に関する必要十分条件を求めよ。

(3)　$m=4$ となるための a，b に関する必要十分条件を求めよ。