最難関大学への数学Ⅲ　～発想力と計算力がモノをいう世界を旅してみよう。ちょっと難しいけどやっぱり数学はオモロイなあ～

1～10　面積比較による不等式の証明　　11～14　定積分関数　　15～20　いろいろな問題

1 [2015 京都工芸繊維大]基礎　まずは肩慣らしの１問

(1)　定積分 $\int_0^1 \log(1+x^2)\,dx$ の値を求めよ。

(2)　自然数 n に対して，n 個の数 n^2+k^2 $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ の積

$a_n=(n^2+1^2)(n^2+2^2)\cdots\cdots(n^2+n^2)$ を考える。極限 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{a_n}}{n^2}$ を求めよ。

2 [2015 九州大]基礎　(１)(２)は朝の寝起き１秒後でもできる。(３)がメイン

(1)　関数 $y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x>1$ において単調に減少することを示せ。

(2)　不定積分 $\int \dfrac{1}{x(\log x)^2}dx$ を求めよ。

(3)　n を３以上の整数とするとき，不等式 $\sum_{k=3}^{n}\dfrac{1}{k(\log k)^2}<\dfrac{1}{\log 2}$ が成り立つことを示せ。

3 [2010 お茶の水女子大]基礎　教科書の章末問題レベル

自然数 n に対して，

$$2\sqrt{n+1}-2<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\leqq 2\sqrt{n}-1$$

が成り立つことを示せ。

4 [1996 大阪大]標準　これできな阪大受からんわ。

n を２以上の自然数とする．次の問いに答えよ．

(1)　不等式 $n\log n-n+1<\sum_{k=1}^{n}\log k<(n+1)\log n-n+1$ が成り立つことを示せ．

(2)　極限値 $\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n\log n}}$ を求めよ．

5 [2009 宮崎大]応用　ひっかかったらアカンで

n を自然数とするとき，極限値 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$ を求めよ。

6 [2014 大阪大]応用　阪大にしては珍しくセンスが良い。よくがんばった。

$\sum_{n=1}^{40000}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分を求めよ。

7 [2006 香川大]標準　台形近似はおぼえとこ

k は正の整数とする。

(1)　曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ は，下に凸であることを示せ。

(2)　定積分 $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x}dx$ を求めよ。

(3)　２直線 $x=k-\dfrac{1}{2}$，$x=k+\dfrac{1}{2}$ と曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\left(k,\ \dfrac{1}{k}\right)$ における接線，および x 軸によって囲まれた台形の面積を求めよ。

(4)　次の不等式を証明せよ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<\log(2n+1)$$

8 [2007 埼玉大]標準　円周率の近似は東大でも出題されてたわ。

$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ とし，曲線 $y=f(x)$ $(x>0)$ の変曲点を $(a,\ f(a))$ とする。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　定積分 $\int_a^1 f(x)\,dx$ の値を求めよ。

(3)　４点 $(a,\ f(a))$，$(a,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ f(1))$ を頂点とする台形の面積と定積分 $\int_a^1 f(x)\,dx$ を比較することにより，円周率 π は 3.17 より小さいことを証明せよ。必要なら，$\sqrt{3}=1.732\cdots\cdots$ を用いてよい。

9 [1997 京都大]応用　なかなか面白い。センスいるな。

(1)　$0\leqq\alpha<\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるとき，次の不等式を示せ．

$$\int_\alpha^\beta \sin x\,dx+\int_{\pi-\beta}^{\pi-\alpha}\sin x\,dx>(\beta-\alpha)\{\sin\alpha+\sin(\pi-\beta)\}$$

(2)　$\sum_{k=1}^{7}\sin\dfrac{k\pi}{8}<\dfrac{16}{\pi}$ を示せ．

10 [2007 東京大]応用　さすが、東大。上の京大と双璧で学習すべき

(1)　$0<x<a$ を満たす実数 x，a に対し，次を示せ。

$$\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

(2)　(1) を利用して，$0.68<\log 2<0.71$ を示せ。ただし，$\log 2$ は 2 の自然対数を表す。

最難関大学への数学Ⅲ　～発想力と計算力がモノをいう世界を旅してみよう。ちょっと難しいけどやっぱり数学はオモロイなあ～

1～10　面積比較による不等式の証明　　11～14　定積分関数　　15～20　いろいろな問題

11 [2009 首都大学東京]基礎　関数は数Ⅲやけど、考え方は文系レベル

実数 a に対して定積分 $f(a)=\int_0^1 e^x|x-a|dx$ を考えるとき，次の問いに答えよ。

(1)　定積分 $\int_0^1 e^x(x-a)dx$ を求めよ。

(2)　$f(a)$ を求めよ。

(3)　$f(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

12 [2010 横浜国立大]標準　フツー

(1)　$0<x<\pi$ のとき，$\sin x-x\cos x>0$ を示せ。

(2)　定積分 $I=\int_0^\pi|\sin x-ax|dx$ $(0<a<1)$ を最小にする a の値を求めよ。

13 [2011 東京工業大]応用　めんどくさい

実数 x に対して，$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t-x\sin 2t|dt$ とおく。

(1)　関数 $f(x)$ の最小値 を求めよ。

(2)　定積分 $\int_0^1 f(x)dx$ を求めよ。

14 [2001 東京工業大]応用　とってもめんどくさい

$a>0$，$t>0$ に対して，定積分

$$S(a,\ t)=\int_0^a\left|e^{-x}-\frac{1}{t}\right|dx$$

を考える．

(1)　a を固定したとき，t の関数 $S(a,\ t)$ の最小値 $m(a)$ を求めよ．

(2)　$\lim_{a\to 0}\frac{m(a)}{a^2}$ を求めよ．

15 [2000 大阪大]標準　オリスタにあるで

実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す．n を正の整数とし

$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{[\sqrt{2n^2-k^2}]}{n^2}$ とおく．このとき，$\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

16 [2004 東京電機大]標準　※有名問題　オリスタにあるで

m，n を正の整数とする．このとき，定積分 $I(m,\ n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$ に関して

(1)　$I(m,\ 1)$ を求めよ．

(2)　$n\geqq 2$ のとき，$I(m,\ n)$ を $I(m+1,\ n-1)$ を用いて表せ．

(3)　$I(m,\ n)$ を m と n を用いて表せ．

17 [2008 山形大]標準　※有名問題

数列 $\{a_n\}$ が

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定義されるとき，次の問いに答えよ。

(1)　a_1，a_2 を求めよ。

(2)　部分積分法を用いて，$a_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}a_n$ を示せ。

(3)　$b_n=(n+1)a_{n+1}a_n$ とおくとき，$b_n=\frac{\pi}{2}$ を示せ。

(4)　$\sqrt{\frac{n\pi}{2(n+1)}}<\sqrt{n}\,a_n<\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ を示し，$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,a_n$ を求めよ。

18 [2009 北海道大]標準　※有名問題　まさかの円周率登場

自然数 n に対して $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{2n}dx$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　a_1 を求めよ。

(2)　a_{n+1} を a_n で表せ。

(3)　$\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(4)　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ を求めよ。

19 [2006 東京大]応用　見た目はシンプルなんだけどね

$a_1=\frac{1}{2}$ とし，数列 $\{a_n\}$ を漸化式 $a_{n+1}=\frac{a_n}{(1+a_n)^2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定める。

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対し $b_n=\frac{1}{a_n}$ とおく。

$n>1$ のとき，$b_n>2n$ となることを示せ。

(2)　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$ を求めよ。

(3)　$\lim_{n\to\infty}na_n$ を求めよ。

20 [1997 大阪大]応用　eの無理数性の証明であ～る

自然数 n に対して，関数 $f_n(x)=x^ne^{1-x}$ と，その定積分 $a_n=\int_0^1 f_n(x)dx$ を考える．ただし，e は自然対数の底である．

(1)　区間 $0\leqq x\leqq 1$ 上で $0\leqq f_n(x)\leqq 1$ であることを示し，更に $0<a_n<1$ が成り立つことを示せ．

(2)　a_1 を求めよ．$n>1$ に対して a_n と a_{n-1} の間の漸化式を求めよ．

(3)　自然数 n に対して，等式 $\frac{a_n}{n!}=e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\right)$ が成り立つことを証明せよ．

(4)　いかなる自然数 n に対しても，$n!e$ は整数とならないことを示せ．