２０１７夏セミナー　神大市大府大への数学　「夏だ！　微分　積分　いい気分」（担当　赤阪正純）

微積で“いい気分”になるための２０問（基本６問　標準９問　応用６問）

第１日目　関数の増減、接線（1～6）　　第２日目　面積（7～１５）　　第３日目　定積分で表された関数（１６～２１）

基本問題でポイントを簡単に確認し、講習では主に標準問題、応用問題を扱います。
数学Ⅱの「微分積分」は決して難しくありません。暗記事項や公式も少なく、入試では得点源となるはずです。そのためには、確実な計算力が必要で、簡単な問題でも答えが合わないと意味がありません。「基本問題の全問正解」を期待します。

---

1 [2011 京都大]基本

実数 a が変化するとき，3 次関数 $y=x^3-4x^2+6x$ と直線 $y=x+a$ のグラフの共有点の個数はどのように変化するか。a の値によって分類せよ。

2 [2008 昭和薬科大]基本

関数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2+4(a^2-9)x+1$ において

(1)　$f(x)$ が極大値，極小値をもつための a の値の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ が $x>0$ で極大値，極小値をもつための a の値の範囲を求めよ。

3 [2000 香川大]標準

3 次関数 $f(x)=x^3-3a^2x+a^2-a$ について，次の問いに答えよ.

(1)　この関数の極値を調べよ.

(2)　方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 つの実数の解をもつような a の値の範囲を求めよ.

(3)　(2) のとき，3 つの解は $-2a$ と $2a$ の間にあることを示せ.

4 [2007 茨城大]標準

$y=\dfrac{x^2}{2}$ の表す放物線を C とする。曲線 C 上の点 P を通り，P における C の接線と垂直に交わる直線を点 P での C の法線とよぶことにする。

(1)　C 上の点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ $(a \neq 0)$ での C の法線を表す式を求めよ。

(2)　点 $\mathrm{A}(t,\ t+1)$ を通る C の法線が 3 つ存在するとする。このような t の値の範囲を求めよ。

5 [2006 大阪大]応用

a を実数とし，関数 $f(x)=x^3-3ax+a$ を考える。$0 \leqq x \leqq 1$ において $f(x) \geqq 0$ となるような a の範囲を求めよ。

6 [2009 大阪大]応用

曲線 C : $y=x^3-kx$ (k は実数) を考える。C 上に点 $\mathrm{A}(a,\ a^3-ka)$ $(a \neq 0)$ をとる。
次の問いに答えよ。

(1)　点 A における C の接線を ℓ_1 とする。ℓ_1 と C の A 以外の交点を B とする。B の x 座標を求めよ。

(2)　点 B における C の接線を ℓ_2 とする。ℓ_1 と ℓ_2 が直交するとき，a と k が満たす条件を求めよ。

(3)　ℓ_1 と ℓ_2 が直交する a が存在するような k の値の範囲を求めよ。

２０１７夏セミナー　神大市大府大への数学　「夏だ！　微分　積分　いい気分」（担当　赤阪正純）

微積で“いい気分”になるための２０問（基本６問　標準９問　応用６問）

第１日目　関数の増減、接線（$\boxed{1}$〜$\boxed{6}$）　　第２日目　面積（$\boxed{7}$〜$\boxed{15}$）　　第３日目　定積分で表された関数（$\boxed{16}$〜$\boxed{21}$）

基本問題でポイントを簡単に確認し、講習では主に標準問題、応用問題を扱います。
数学Ⅱの「微分積分」は決して難しくありません。暗記事項や公式も少なく、入試では得点源となるはずです。そのためには、確実な計算力が必要で、簡単な問題でも答えが合わないと意味がありません。「基本問題の全問正解」を期待します。

$\boxed{7}$ [2009 東京理科大]基本

a は定数で，$a>1$ とする。関数 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$ について

(1)　$f(x)$ の極値を求めよ。

(2)　$f(x)=0$ が 3 つの異なる実数解をもつための条件を求めよ。

(3)　$a=4$ のとき，$y=f(x)$ と $y=x^2$ のグラフで囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{8}$ [2011 名城大]基本

xy 平面上に，2 つの放物線

C_1 : $y=x^2$,

C_2 : $y=-x^2+ax+b$ (a，b は実数)

があり，C_2 の頂点を P とする。C_1，C_2 は異なる 2 点で交わり，このとき，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を S とする。

(1)　P の座標を a，b を用いて表せ。

(2)　S を a，b を用いて表せ。

(3)　C_2 が $S=9$ を満たして動くとき，P が描く軌跡を求めよ。

$\boxed{9}$ [2010 岩手大]標準

曲線 $y=-x^2+3x$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 $y=-x^2+3x$ と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

(2)　a を $0<a<3$ を満たす定数とする。このとき，直線 $y=ax$ と曲線 $y=-x^2+3x$ との交点の x 座標を求めよ。

(3)　(1) の図形の面積を 2 等分する原点を通る直線を求めよ。

$\boxed{10}$ [2015 大分大]標準

k を実数とする。関数 $y=|x(x-1)|$ のグラフと直線 $y=kx$ が異なる 3 点を共有している。これらで囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする。

(1)　k の値の範囲を求めよ。

(2)　S を k の式で表せ。

(3)　S が最小になるときの k の値を求めよ。

$\boxed{11}$ [2007 慶応義塾大]標準

xy 平面上の曲線 C : $2y=|x^2-5x+4|$ と直線 ℓ : $y=kx$ ($k>0$) が 3 個の共有点をもっているとする。このとき，k の値を求めよ。また，曲線 C と直線 ℓ で囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{12}$ [2014 京都大]標準

t を実数とする。$y=x^3-x$ のグラフ C へ点 P$(1,\ t)$ から接線を引く。

(1)　接線がちょうど 1 本だけ引けるような t の範囲を求めよ。

(2)　t が (1) で求めた範囲を動くとき，P$(1,\ t)$ から C へ引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{13}$ [2016 福井大]応用

$f(x)=x^3$，$g(x)=x^3-4$ とし，曲線 C_1 : $y=f(x)$ と曲線 C_2 : $y=g(x)$ の両方に接する直線を ℓ とする。

(1)　直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2)　ℓ と C_1 との接点を P，ℓ と y 軸との交点を Q，ℓ と C_1 とが P 以外で交わる点を R とする。線分 PQ と線分 QR の長さの比 PQ : QR を求めよ。

(3)　C_2 と ℓ とで囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{14}$ [2016 愛知教育大]応用

座標平面上に曲線 C : $y=x^3-x$ と点 A$(1,\ 0)$ がある。

(1)　曲線 C の接線で，点 A を通るような接線の方程式をすべて求めよ。

(2)　点 A を通る傾き k の直線 ℓ が曲線 C と異なる 3 点で交わるとき，k の値の範囲を求めよ。

(3)　(2) における異なる 3 つの交点の x 座標を，小さい方から順に a_1，a_2，a_3 とする。$a_2=1$ のとき，曲線 C と直線 ℓ によって囲まれた 2 つの部分の面積の和を k を用いて表せ。

$\boxed{15}$ [2009 立命館大]応用

放物線 $y=x^2$ と 4 点 O$(0,\ 0)$，A$(t,\ 0)$，B$(t,\ 4t)$，C$(0,\ 4t)$ を頂点とする長方形 OABC がある。ただし，$t>0$ とする。長方形 OABC の内部にあって，$y\leqq x^2$ を満たす領域を S とし，その面積を $S(t)$ とする。

(1)　$S(2)$ を求めよ。　　(2)　$S(t)$ を求めよ。

(3)　$S(t)$ が長方形 OABC の面積のちょうど半分となる t の値を求めよ。

基本問題でポイントを簡単に確認し、講習では主に標準問題、応用問題を扱います。
数学Ⅱの「微分積分」は決して難しくありません。暗記事項や公式も少なく、入試では得点源となるはずです。そのためには、確実な計算力が必要で、簡単な問題でも答えが合わないと意味がありません。「基本問題の全問正解」を期待します。

---

16 [2009 東北学院大]基本

次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=x^2+\int_0^1 xf(t)\,dt+\int_{-1}^0 f(t)\,dt$$

17 [2011 福岡大]基本

a を定数とし，関数 $f(x)$ が等式 $\int_{-3}^x f(t)\,dt=x^3-3x^2+4ax+3a$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

(2)　定積分 $\int_0^5 |f(x)|\,dx$ を求めよ。

18 [2011 名城大]標準

実数 x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_1^2 |x-t|\,dt$$

とするとき，$y=f(x)$ のグラフをかき，$f(x)$ の最小値を求めよ。

19 [2008 慶応義塾大]標準

関数 $F(t)$ を $F(t)=\int_0^1 |x^2-2tx|\,dx$ によって定義する。

(1)　実数 t で場合分けをして，$F(t)$ を t の式で表せ。

(2)　t が $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くときの $F(t)$ の最大値と最小値を求めよ。

20 [2015 同志社大]応用

a を実数とする。$f(x)=x^2-(1+a)x+a$ とし，$I(a)=\int_0^1 |f(x)|\,dx$ とする。

(1)　$a<0$ のとき $I(a)$ を a を用いて表せ。

(2)　$0\leqq a\leqq 1$ のとき $I(a)$ を a を用いて表せ。

(3)　$a>1$ のとき $I(a)$ を a を用いて表せ。

(4)　$0\leqq a\leqq 1$ のとき $I(a)$ の最大値と最小値を求めよ。

21 [2013 同志社大]応用

$x\geqq 0$ に対して $f(x)=\int_0^1 |t-x|(t+x)\,dt$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$f(1)$ の値を求めよ。

(2)　$x>1$ のとき $f(x)$ を計算し，$x>1$ において関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(3)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき $f(x)$ を計算し，$0\leqq x\leqq 1$ において関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(4)　$x\geqq 0$ における関数 $y=f(x)$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。