# 2017年夏セミナー 東大京大阪大医学部への数学「極限の応用」

1学期に学習した数学Ⅲαの内容に関する入試問題を紹介します。数学Ⅲはこの後「微分法」「積分法」へと続いていくので、当然ながらこれらの範囲が入試のメインになりますが、「極限」に関する問題もチラホラ出題されているので侮れません。

1テーマ4問ずつの5テーマ、全部で20問の美しいセットです。全体的にやや難しめですが、がんばってついて来てください。数列の極限の有名問題( $1\sim4$ ) 漸化式の図形への応用( $5\sim8$ ) ガウス記号( $9\sim12$ ) 連続性や収束・発散( $13\sim16$ ) 関数の極限の図形への応用( $17\sim20$ )

#### 1 [2009 同志社大]標準

 $a_1>4$  として、漸化式  $a_{n+1}=\sqrt{a_n+12}$  で定められる数列  $\{a_n\}$  を考える。

- (1) n=2, 3, 4, …… に対して、不等式  $a_n>4$  が成り立つことを示せ。
- (2) n=1, 2, 3, …… に対して、不等式  $a_{n+1}-4<\frac{1}{8}(a_n-4)$  が成り立つことを示せ。
- (3)  $\lim a_n$  を求めよ。

# 2 [2013 神戸大]応用

数列  $\{a_n\}$   $(n=1, 2, \cdots)$  は  $a_1=0, a_{n+1}=\frac{1}{4-a_n^2}$   $(n=1, 2, \cdots)$  を満たすとする。

- (1) すべての自然数 n に対し、 $0 \le a_n < 1$  が成り立つことを示せ。
- (2) 3次方程式  $x^3-4x+1=0$  は、0<x<1 においてただ 1 つの解  $\alpha$  をもつことを示せ。
- (3) (2) の  $\alpha$  に対し、 $|a_{n+1}-\alpha| \leq \beta |a_n-\alpha|$  ( $n=1, 2, \dots$ ) が成り立つような  $\beta$  ( $0 < \beta < 1$ ) を 1 つ求めよ。
- (4) (2) の $\alpha$ に対し $\lim a_n = \alpha$ が成り立つことを示せ。

# 3 4STEPの197番なので明らかに基礎

h>0 のとき,不等式  $(1+h)^n \ge 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2$  が成り立つ。このことを用いて,数 列  $\left\{\frac{n}{3^n}\right\}$  の極限を求めよ。

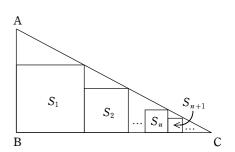
### 4 [2012 早稲田大]応用

c を正の実数として、漸化式  $a_n=\frac{a_{n-1}^2}{3^n}$   $(n\ge 1)$ 、 $a_0=c$  で定義される数列  $\{a_n\}$  を考える。 このとき  $\lim a_n=\infty$  となるような c の範囲を求めよ。

#### [2013 芝浦工業大]基礎

AB=4, BC=6,  $\angle ABC=90^{\circ}$  の直角 三角形 ABC の内部に, 図のように正方 形  $S_1$ ,  $S_2$ , ……,  $S_n$ , …… がある。

- (1)  $S_1$  の 1 辺の長さを求めよ。
- (2)  $S_n$  の面積を  $a_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) とする。  $a_n$  を n の式で表せ。
- (3)  $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n a_k$  の値を求めよ。



## [2006 鳥取大]標準(有名問題)

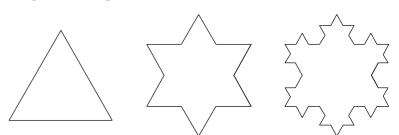
平面内に多角形が与えられたとき、その各辺に対し次の操作を施す:

 $(\mathcal{T})$  多角形の辺,それを仮に AB とすると,辺 AB を 3 等分する点 C, D をこの順に A に近い方からとり,これら 2 点を頂点とする正三角形の C, D 以外の頂点を E とし,点 A, C, E, D, B を順に線分で結んでできる折れ線により,辺 AB をおきかえる。 ただし,点 E は常に多角形の外側にとるものとする。



1 辺の長さが 1 の正三角形  $T_0$  の各辺に対し、上の操作  $(\mathcal{F})$  を施してできる多角形を  $T_1$ 、 $T_1$  の各辺に対し操作  $(\mathcal{F})$  を施してできる多角形を  $T_2$ 、 $T_2$  の各辺に対し操作  $(\mathcal{F})$  を施してできる多角形を  $T_3$ 、以下同様にして、多角形  $T_n$  から多角形  $T_{n+1}$  を作る。(下の図は 左から順に、 $T_0$ 、 $T_1$ 、 $T_2$  をかいたものである。)

- (1) 多角形  $T_n$  に含まれる辺の個数  $a_n$  および 1 辺の長さ  $l_n$  を、それぞれ n を用いて表せ、
- (2) 多角形  $T_n$  の面積  $S_n$  を n を用いて表し、  $n \to \infty$  のときの極限を調べよ。
- (3) 多角形  $T_n$  の周の長さ  $L_n$  を n を用いて表し、 $n \to \infty$  のときの極限を調べよ。



# 2017年夏セミナー 東大京大阪大医学部への数学「極限の応用」

1 学期に学習した数学Ⅲαの内容に関する入試問題を紹介します。数学Ⅲはこの後「微分法」「積分法」へと続いていくので、当然ながらこれらの範囲が入試のメインになりますが、「極限」に関する問題もチラホラ出題されているので侮れません。

1テーマ4問ずつの5テーマ、全部で20問の美しいセットです。全体的にやや難しめですが、がんばってついて来てください。数列の極限の有名問題(1~4) 漸化式の図形への応用(5~8) ガウス記号(9~12) 連続性や収束・発散(13~16)関数の極限の図形への応用(17~20)

## 7 [2016 大分大]標準

自然数 n に対して関数  $y=2nx-x^2$  のグラフと x 軸で囲まれた領域 (境界を含む)  $R_n$  を考える。

- (1) 領域  $R_n$  に含まれる格子点 (x 座標と y 座標がともに整数である点) の数  $S_n$  を求めよ。
- (2) 点 A(0, 0), B(2n, 0), および関数 y の頂点を結ぶ線分で囲まれた領域 (境界を含む) に含まれる格子点の数  $T_n$  を求めよ。
- (3)  $\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{S_n}$ を求めよ。

# 8 [2014 名古屋大]応用

xy平面の  $y \ge 0$  の部分にあり、x 軸に接する円の列  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ 、…… を次のように定める

- ・ $C_1$ と $C_2$ は半径1の円で,互いに外接する。
- ・正の整数 n に対し, $C_{n+2}$  は  $C_n$  と  $C_{n+1}$  に外接し, $C_n$  と  $C_{n+1}$  の弧および x 軸で囲まれる部分にある。

円 $C_n$ の半径を $r_n$ とする。

- (2) すべての正の整数 n に対して  $\frac{1}{\sqrt{r_n}} = s\alpha^n + t\beta^n$  が成り立つように、n によらない

定数  $\alpha$ ,  $\beta$ , s, t の値を 1 組与えよ。

(3)  $n \to \infty$  のとき数列  $\left\{\frac{r_n}{k^n}\right\}$  が正の値に収束するように実数 k の値を定め、そのときの極限値を求めよ。

# 9 [2001 東海大]基礎

lim	$[10^n\pi]$		
$n \to \infty$	10 <sup>n</sup>	_	

ただし, [x]は, 実数 x に対して,  $m \le x < m+1$  を満たす整数 m である.

## [10] [2009 慶応義塾大]基礎

実数  $\alpha$  に対して  $\alpha$  を超えない最大の整数を  $[\alpha]$  と書く。 [ ] をガウス記号という。

- (1) 自然数mの桁数kをガウス記号を用いて表すとk= である。
- (2) 自然数 n に対して  $3^n$  の桁数を  $k_n$  で表すと  $\lim_{n\to\infty}\frac{k_n}{n}=$  である。

## [11][2004 東洋大]標準

自然数 k に対して  $\sqrt{k}$  の整数部分を f(k) とし、自然数 n に対して  $S(n) = \sum_{k=1}^{n^2} f(k)$  とおく.

- (1) S(4) を求めよ.
- (2) S(n) を求めよ.
- (3)  $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n^2} \sqrt{k}$  を求めよ.

#### [12] [2011 東京理科大]応用

実数xに対し、[x]はx以下の最大の整数を表す。

- (1) k, t を自然数とするとき,  $\left[\sqrt{k}\right] = t$  となるような k のとりうる値の範囲を, t を用いた不等式で表せ。
- (2) n を自然数とし、和  $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2[\sqrt{k}]+1}$  が自然数となるような n の値を、小さい順に並べて、 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$ 、…… と定める。
- (ア)  $a_1$ ,  $a_2$ の値を求めよ。
- (イ) 自然数 m に対して、 $a_m$  および  $\sum_{k=1}^{a_m} \frac{1}{2[\sqrt{k}]+1}$  を m を用いて表せ。
- (3)  $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2[\sqrt{k}]+1}$  を求めよ。

# 2017年夏セミナー 東大京大阪大医学部への数学「極限の応用」

1 学期に学習した数学Ⅲαの内容に関する入試問題を紹介します。数学Ⅲはこの後「微分法」「積分法」へと続いていくので、当然ながらこれらの範囲が入試のメインになりますが、「極限」に関する問題もチラホラ出題されているので侮れません。

1テーマ4問ずつの5テーマ、全部で20問の美しいセットです。全体的にやや難しめですが、がんばってついて来てください。数列の極限の有名問題( $1\sim4$ ) 漸化式の図形への応用( $5\sim8$ ) ガウス記号( $9\sim12$ ) 連続性や収束・発散( $13\sim16$ ) 関数の極限の図形への応用( $17\sim20$ )

## [2012 京都大]基礎

a が正の実数のとき  $\lim_{n\to\infty} (1+a^n)^{\frac{1}{n}}$  を求めよ。

# [14] [2001 公立はこだて未来大]標準

次の問いに答えよ.

(1) 
$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n} - x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$$
 を求めよ.

(2) 上で定めた関数 f(x) がすべての x について連続であるように、a, b の値を定めよ.

## [2007 京都大]標準

x, yを相異なる正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 0$$
,  $a_{n+1} = xa_n + y^{n+1}$   $(n = 1, 2, 3, \dots)$ 

によって定めるとき,  $\lim_{n\to\infty} a_n$  が有限の値に収束するような座標平面上の点 (x, y) の範囲を図示せよ。

# [16] [2009 岡山大]標準

xを実数とし、次の無限級数を考える。

$$x^{2} + \frac{x^{2}}{1 + x^{2} - x^{4}} + \frac{x^{2}}{(1 + x^{2} - x^{4})^{2}} + \cdots + \frac{x^{2}}{(1 + x^{2} - x^{4})^{n-1}} + \cdots$$

- (1) この無限級数が収束するような x の範囲を求めよ。
- (2) この無限級数が収束するとき、その和として得られる x の関数を f(x) と書く。また、 $h(x) = f(\sqrt{|x|}) |x|$  とおく。このとき、 $\lim_{x\to 0} h(x)$  を求めよ。
- (3) (2) で求めた極限値を a とするとき,  $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-a}{x}$  は存在するか。理由を付けて答えよ。

#### [17][2011 愛知教育大]基礎

 $\theta$  を $0 \le \theta \le \pi$  を満たす実数とする。単位円周上の点 P を,動径 OP と x 軸の正の部分と のなす角が  $\theta$  である点とし,点 Q を x 軸の正の部分の点で,点 P からの距離が 2 であるものとする。また, $\theta = 0$  のときの点 Q の位置を A とする。

- (1) 線分 OQ の長さを  $\theta$  を使って表せ。
- (2) 線分 QA の長さを L とするとき,極限値  $\lim_{\theta \to 0} \frac{L}{\theta^2}$  を求めよ。

## [18] [2016 秋田大] 標準

- (1) 点 Q の座標を  $\theta$  を用いて表せ。
- (2) 点 Q' と点 R' の座標を  $\theta$  を用いて表せ。
- (3) 点 Pが点 A に限りなく近づくとき, $\dfrac{BR'}{BQ'}$  の極限を求めよ。ただし,

 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  であることは用いてよい。

## [19][2001 大阪教育大]標準

(1)  $0 \le \theta_n \le \frac{\pi}{2}$  である数列  $\{\theta_n\}$  が

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}$$
,  $\sin \theta_{n+1} = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \theta_n}}}{\sqrt{2}}$   $(n = 1, 2, 3, \dots)$ 

を満たすとき、数列 $\{\theta_n\}$ の極限 $\lim_{n\to\infty}\theta_n$ を求めよ.

(2) a は正の実数とし、数列  $\{x_n\}$  を  $x_n=\frac{\sin\theta_n}{a^n}$  と定める. 数列  $\{x_n\}$  が 0 でない実数 k に収束するとき、a と k の値を求めよ.

## [1999 京都産業大]標準

O を原点とする平面上に点  $P_0$   $(1,\ 0)$  をとり,点  $P_1$ ,  $P_2$ , ……,  $P_n$ , …… を次のように定める.

点  $P_n$  (n=1, 2, ……) は点  $P_{n-1}$  を原点の周りに角度  $\theta$  だけ回転し、更に原点からの距離を r倍、すなわち  $\angle P_{n-1} OP_n = \theta$  かつ  $OP_n = r OP_{n-1}$  として得られる点である。ただし、 $\theta$  の単位はラジアンで  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 、0 < r < 1 である。

このとき,次の問いに答えよ.

- (1) 線分の長さ  $P_0P_1$  を求めよ.
- (2) 線分の長さ  $P_{n-1}P_n$  を求めよ.
- (3) 無限級数の和  $L=\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}P_{n}$  を求めよ.
- (4)  $r=1-\theta$  とする.  $\theta \longrightarrow 0$  のとき, Lの極限値を求めよ.