$\boxed{1}$ [2016 千葉大]

$z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ (i は虚数単位) とおく。

(1) $z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ を求めよ。

(2) $\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\alpha+\overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ および α を求めよ。ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である。

(3) $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ。

$\boxed{2}$ [1996 東京大]

$2|z-3-3i|=|z|$ を満たす複素数 z のうちで，$|z|$ が最大であるものを z_1, $|z|$ が最小であるものを z_2とする．z_1 と z_2 を求めよ．

$\boxed{3}$ [2016 山形大]

複素数平面上の 3 点 A (α)，W (w)，Z (z) は原点 O (0) と異なり，

$$\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\qquad w=(1+\alpha)z+1+\overline{\alpha}$$

とする。ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役な複素数とする。2 直線 OW，OZ が垂直であるとき，次の問いに答えよ。

(1) $(1+\alpha)\beta+1+\overline{\alpha}=0$ を満たす複素数 β を求めよ。

(2) $|z-\alpha|$ の値を求めよ。

(3) △OAZ が直角三角形になるときの複素数 z を求めよ。

$\boxed{4}$ [2014 北海道大]

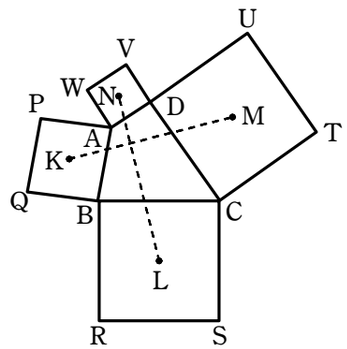
z を複素数とし，i を虚数単位とする。

(1) $\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{1}{z-i}$ が実数となる点 z 全体の描く図形 P を複素数平面上に図示せよ。

(2) z が (1) で求めた図形 P 上を動くときに $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

$\boxed{5}$ [1999 信州大]

図のように，複素数平面上に四角形 ABCD があり，4 点 A，B，C，D を表す複素数をそれぞれ z_1，z_2，z_3，z_4 とする．各辺を 1 辺とする 4 つの正方形 BAPQ，CBRS，DCTU，ADVW を四角形 ABCD の外側に作り，正方形 BAPQ，CBRS，DCTU，ADVW の中心をそれぞれ K，L，M，N とおく．



(1) 点 K を表す複素数 w_1 を z_1 と z_2 で表せ．

(2) KM＝LN，KM⊥LN を証明せよ．

(3) 線分 KM と線分 LN の中点が一致するのは四角形 ABCD がどのような図形のときか．

$\boxed{6}$ [1999 京都大]

相異なる 4 つの複素数 z_1，z_2，z_3，z_4 に対して $w=\dfrac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$ とおく．このとき，以下を証明せよ．

(1) 複素数 z が単位円上にあるための必要十分条件は $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ である．

(2) z_1，z_2，z_3，z_4 が単位円上にあるとき，w は実数である．

(3) z_1，z_2，z_3 が単位円上にあり，w が実数であれば，z_4 は単位円上にある．

$\boxed{7}$ [2003 東京大]

O を原点とする複素数平面上で 6 を表す点を A，$7+7i$ を表す点を B とする．ただし，i は虚数単位である．正の実数 t に対し，$\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ を表す点 P をとる．

(1) ∠APB を求めよ．

(2) 線分 OP の長さが最大になる t の値を求めよ．

$\boxed{8}$ [1999 北海道大]

関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-px}}-ax$ が極値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ．ただし，p は正の定数で，e は自然対数の底である．

$\boxed{9}$ [2000 福島県立医科大]

関数 $f(x)=\dfrac{a-\cos x}{a+\sin x}$ が，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で極大値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ．また，その極大値が 2 となるときの a の値を求めよ．

$\boxed{10}$ [2016 京都大]

(1) n を 2 以上の自然数とするとき，関数 $f_n(\theta)=(1+\cos\theta)\sin^{n-1}\theta$ の $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における最大値 M_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(M_n)^n$ を求めよ。

$\boxed{11}$ [2013 香川大]

曲線 C : $y=\dfrac{\log x}{x}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の概形をかけ。

(2) C の変曲点 P における，C の接線 ℓ の方程式を求めよ。

(3) ℓ と C は，P 以外に共有点をもたないことを示せ。

$\boxed{12}$ [2016 横浜国立大]

a を正の定数とする。2 つの曲線 C_1 : $y=x\log x$ と C_2 : $y=ax^2$ の両方に接する直線の本数を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^2}{x}=0$ は証明なしに用いてよい。

$\boxed{13}$ [2016 東京大]

e を自然対数の底，すなわち $e=\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ とする。すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

$\boxed{14}$ [2015 弘前大]

(1) $0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$-x^2-x\leqq\log(1-x)\leqq-x$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ を次によって定める。

$$a_1=\left(1-\frac{1}{2\cdot1^2}\right)$$

$$a_2=\left(1-\frac{1}{2\cdot2^2}\right)\left(1-\frac{2}{2\cdot2^2}\right)$$

$$\vdots$$

$$a_n=\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)\left(1-\frac{2}{2n^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n}{2n^2}\right)$$

このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

$\boxed{15}$ [2015 愛媛大]

$x>0$ において定義された関数 $f(x)=e^x\log x$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の値域を求めよ。

(2) $f(x)$ の増減を調べよ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ はただ 1 つの変曲点をもつことを示せ。

(4) 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ を曲線 $y=f(x)$ の変曲点とするとき，$\dfrac{1}{2}<\alpha<\dfrac{2}{e}$ であることを示せ。

$\boxed{16}$ [2013 東京工業大]

k を定数とするとき，方程式 $e^x-x^e=k$ の異なる正の解の個数を求めよ。

$\boxed{17}$ [2013 東京大]

a を実数とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\frac{\cos x}{x},\quad g(x)=\sin x+ax$$

このとき $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど 3 つもつような a をすべて求めよ。

$\boxed{18}$ [2011 宮崎大]

方程式 $\tan x=x$ について，次の問いに答えよ。ただし，必要であれば，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす x について，不等式 $\sin x<x<\tan x$ が成り立つことを用いてもよい。

(1) 各自然数 n について，$n\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に方程式 $\tan x=x$ の解がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 各自然数 n について，(1) で存在が示された解を x_n とする。このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-x_n\right)$ を求めよ。