1 [2013 防衛大学校]超基礎

関数 $f(x)=\cos 2x+2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin x$ について次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を $\cos x$ の式で表せ。　　(2)　$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ の値を求めよ。

(3)　$f(x)$ の最大値 M と最小値 m を求めよ。

2 [2008 小樽商科大]基礎

関数 $3\sin^2 x+4\sin x\cos x-\cos^2 x$ の $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における最大値 M と最小値 m を求めよ。

3 [2013 北海道大]基礎

$f(x)=\sqrt{2}\sin x\cos x+\sin x+\cos x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ とする。

(1)　$t=\sin x+\cos x$ とおき，$f(x)$ を t の関数で表せ。

(2)　t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　$f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

4 [2012 岩手大]標準

関数 $f(x)=2\sin^2 x+4\sin x+3\cos 2x$ について，次の問いに答えよ。ただし，$0\leqq x<2\pi$ である。

(1)　$t=\sin x$ とするとき，$f(x)$ を t の式で表せ。

(2)　$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値をすべて求めよ。

(3)　方程式 $f(x)=a$ の相異なる解が 4 個であるような実数 a の値の範囲を求めよ。

5 標準

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，$f(\theta)=3\sin\theta-2\cos\theta$ の最大値，最小値を求めよ。

6 [2008 関西大]標準

$3\sin x+\cos x=c$ が $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で異なる 2 つの解をもつような c の値の範囲を求めよ。

7 [2006 山口大]応用

a を定数とする。x についての方程式 $\cos^2 x+2a\sin x-a-1=0$ の $0\leqq x<2\pi$ における異なる実数解の個数を求めよ。

8 [2016 岐阜大]応用

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　θ の方程式 $\cos 3\theta+\cos\theta=0$ を解け。

(2)　k を正の整数とする。θ の方程式 $\cos 3\theta-k\cos\theta=0$ が解をもつ k を求めよ。また，そのときの解 θ を求めよ。

(3)　m と n を正の整数とする。θ の方程式 $m\cos\theta-3\cos 3\theta+n(1+\cos 2\theta)=0$ が解をもつ m，n の組 $(m,\ n)$ を求めよ。また，そのときの解 θ を求めよ。

9 [2007 静岡大]応用

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおく。$\sin\theta\cos\theta$ を t を用いて表せ。

(2)　$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，$t=\sin\theta+\cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，θ の方程式 $2\sin\theta\cos\theta-2(\sin\theta+\cos\theta)-k=0$ の解の個数を，定数 k が次の 3 つの値の場合について調べよ。

$$k=1,\ k=1-2\sqrt{2},\ k=-1.9$$

10 [2017 西南学院大]基礎

不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)+\log_{\frac{1}{2}}(x-4)-\log_{\frac{1}{2}}(7x-16)>0$ を満たす x のうち，最小の自然数は ア [　　]，最大の自然数は イ [　　] である。

11 [2017 龍谷大]基礎

方程式 $\log_3 x+\log_9(4-x)=1$ を解け。

12 [2017 関西学院大]基礎

関数 $y=(\log_3 x)^2-\log_{\sqrt{3}} x^2+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{9}{x}$ $\left(\dfrac{1}{27}\leqq x\leqq 27\right)$ ……① について考える。

$t=\log_3 x$ とおき，y を t の式で表すと ア [　　] となる。よって，関数 ① は $x=$ イ [　　] のとき最小値 ウ [　　] をとり，$x=$ エ [　　] のとき最大値 オ [　　] をとる。

13 [2014 上智大]標準

3^{2014} は ア [　　] 桁の数であり，最も大きい位の数字は イ [　　]，一の位の数字は ウ [　　] である。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$ とする。

14 [2009 青山学院大]標準

$x \geqq 1$，$y \geqq 1$ で $(\log_2 x-1)^2+(\log_2 y)^2=5$ とする。このとき，x^2y の最大値と最小値を求めよ。

15 [2013 南山大]標準

実数 a に対して，x についての方程式 $4^x+a\cdot 2^{x+2}+3a+1=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

16 [2017 摂南大]応用

a を実数の定数とする。x に関する方程式 $\log_2(x-1)-\log_4(2x-a)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，a の値の範囲は ア $\boxed{}$ $<a<$ イ $\boxed{}$ である。

17 [2011 東北大]応用

(1)　実数 x に関する連立不等式

$$\begin{cases} x \geqq -1 \\ 2\cdot 3^x + a\cdot 3^{-x} \leqq 1 \end{cases}$$

が解をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2)　$x \geqq -1$ を満たすすべての実数 x に対し，不等式 $3^x + a\cdot 3^{-x} \geqq a$ が成り立つような実数 a の範囲を求めよ。

18 [2003 大阪教育大]応用

実数 x に対して，$t=2^x+2^{-x}$，$y=4^x-6\cdot 2^x-6\cdot 2^{-x}+4^{-x}$ とおく．

(1)　x が実数全体を動くとき，t の最小値を求めよ．

(2)　y を t の式で表せ．

(3)　x が実数全体を動くとき，y の最小値を求めよ．

(4)　a を実数とするとき，$y=a$ となるような x の個数を求めよ．

19 [16センター本試 センター本試]

k を正の定数として $\cos^2 x-\sin^2 x+k\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)=0$ ……① を満たす x について考える。

(1)　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で ① を満たす x の個数について考えよう。

① の両辺に $\sin^2 x\cos^2 x$ をかけ，2 倍角の公式を用いて変形すると

$\left(\dfrac{\sin^2 2x}{\boxed{ア}}-k\right)\cos 2x=0$ ……② を得る。

したがって，k の値に関係なく，$x=\dfrac{\pi}{\boxed{イ}}$ のときは常に ① が成り立つ。

また，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $0<\sin^2 2x\leqq 1$ であるから，$k>\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ のとき，① を満たす x は $\dfrac{\pi}{\boxed{イ}}$ のみである。

一方，$0<k<\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ のとき，① を満たす x の個数は $\boxed{オ}$ 個であり，$k=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ のときは $\boxed{カ}$ 個である。

(2)　$k=\dfrac{4}{25}$ とし，$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で ① を満たす x について考えよう。

② により $\sin 2x=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ であるから $\cos 2x=\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}$ である。

したがって $\cos x=\dfrac{\sqrt{\boxed{シ}}}{\boxed{ス}}$ である。

20 [08センター追試 センター追試]

a は実数とする。x の方程式 $(2^x+3^x)\left(\dfrac{9}{2^x}+\dfrac{4}{3^x}\right)=a$ ……① について考える。

(1)　$X=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$ とおけば，方程式 ① は X を用いて

$\boxed{ア}X+\dfrac{\boxed{イ}}{X}+\boxed{ウエ}=a$ ……② となる。方程式 ② が異なる二つの正の解をもつのは $a>\boxed{オカ}$ のときである。このとき，方程式 ① は異なる二つの解をもち，それらの和は $\boxed{キク}$ であることがわかる。

(2)　$a=50$ とする。方程式 ② の解は $X=\boxed{ケ}$，$\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ であるから，方程式 ① の解は $x=\dfrac{\boxed{シ}}{\log_2 3-\boxed{ス}}$，$\dfrac{\boxed{セソ}\log_2 3}{\log_2 3-\boxed{ス}}$ となる。

21 [14センター追試 センター追試]

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ として，$f(\theta)=8\sin\theta\cos\theta+6\cos^2\theta$ とおく。

(1)　2 倍角の公式と三角関数の合成を用いると

$f(\theta)=\boxed{ア}\sin 2\theta+\boxed{イ}(\cos 2\theta+1)=\boxed{ウ}\sin(2\theta+\alpha)+\boxed{イ}$ ……①

となる。ただし，α は $\sin\alpha=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{ウ}}$，$\cos\alpha=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{ウ}}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすものとする。

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$2\theta+\alpha$ のとり得る値の範囲は $\alpha\leqq 2\theta+\alpha\leqq\pi+\alpha$ であるから，

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ に注意すると，$\sin(2\theta+\alpha)$ は，$\theta=\boxed{カ}$ で最大値 1，$\theta=\boxed{キ}$ で最小値 $-\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ をとることがわかる。ただし，$\boxed{カ}$，$\boxed{キ}$ については，当てはまるものを，次の ⓪～⑤ のうちから一つずつ選べ。

⓪ 0　① $\dfrac{\pi}{4}-\alpha$　② $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}$　③ $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$

④ $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}$　⑤ $\dfrac{\pi}{2}$

以上のことから，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(\theta)$ のとり得る値の範囲は

$\boxed{コ}\leqq f(\theta)\leqq\boxed{サ}$ である。

(2)　$f(\theta)=6$，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ を求めよう。① を用いると，$f(\theta)=6$ から

$\sin(2\theta+\alpha)=\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ である。ここで，$\sin\alpha=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{ウ}}$ と，すべての x について

$\sin(\pi-x)=\boxed{セ}$ であることに注意すると，求める θ は $\boxed{ソ}$ と $\boxed{タ}$ であることがわかる。

ただし，$\boxed{セ}$ については，当てはまるものを，次の ⓪～③ のうちから一つ選べ。

⓪ $\cos x$　① $-\cos x$　② $\sin x$　③ $-\sin x$

また，$\boxed{ソ}$，$\boxed{タ}$ については，当てはまるものを，次の ⓪～⑤ のうちから一つずつ選べ。$\boxed{ソ}$ と $\boxed{タ}$ は解答の順序を問わない。

⓪ 0　① α　② $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$　③ $\dfrac{\pi}{2}$　④ $\pi-2\alpha$　⑤ $\pi-\alpha$

22 [13センター追試 センター追試]

$2\log_2 y=(\log_8 2x)^2$ のとき，$z=\dfrac{x}{y}$ を最大にする x，y の値とそのときの z の値を求めよう。

まず，$a=\log_8 2x$ とおくと，$2x=\boxed{ア}^{\boxed{イ}}$ である。$2x=\boxed{ア}^{\boxed{イ}}$ について，2 を底とする両辺の対数をとることによって，$a=\dfrac{\log_2 x+\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ であることがわかる。よって

$\log_8 2x=\dfrac{\log_2 x+\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ ……① である。

次に，$z=\dfrac{x}{y}$ について，2 を底とする両辺の対数をとると，$\boxed{オ}$ となる。$\boxed{オ}$ に当てはまるものを，次の ⓪～③ のうちから一つ選べ。

⓪ $\log_2 z=\log_2 x+\log_2 y$　① $\log_2 z=\log_2 x-\log_2 y$

② $\log_2 z=\log_2 x\times\log_2 y$　③ $\log_2 z=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 y}$

$2\log_2 y=(\log_8 2x)^2$ と ① と $\boxed{オ}$ により，$t=\log_2 x$ とおいて，$\log_2 z$ を t を用いて表すと $\log_2 z=-\dfrac{1}{\boxed{カキ}}\left(t-\boxed{ク}\right)^2+\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ ……② となる。

x のとり得る値の範囲は $\boxed{サ}$ であるから，$t=\log_2 x$ により，t のとり得る値の範囲は $\boxed{シ}$ である。$\boxed{サ}$，$\boxed{シ}$ に当てはまるものを，次の ⓪～③ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ 実数全体　① 1 以上の実数全体

② 負の実数全体　③ 正の実数全体

したがって，② により，$t=\boxed{ス}$ のとき，$\log_2 z$ は最大値 $\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ をとることがわかる。また，$t=\boxed{ス}$ のとき，$2\log_2 y=(\log_8 2x)^2$ と ① により，$\log_2 y=\dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$ である。以上のことから，z を最大にする x，y の値は，$x=\boxed{ツテト}$，$y=\boxed{ナニ}\sqrt{\boxed{ヌ}}$ であり，そのときの z の値は $z=\boxed{ネ}\sqrt{\boxed{ノ}}$ である。