1　京都大学編

$\boxed{1}$ (2016 第 1 回京大オープン文系)
三角形 ABC があり，$\angle\mathrm{BCA} = \dfrac{\pi}{3}$，$\mathrm{BC} = a$，$\mathrm{CA} = b$，$\mathrm{AB} = 1$ とする．$a + b$ のとり得る値の範囲を求めよ．

$\boxed{2}$ (2016 第 2 回京大オープン理系)
1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD-EFGH がある．ただし，四角形 ABCD と四角形 EFGH は向かい合った 1 組の面であり，AE，BF，CG，DH はこの立方体の辺である．この立方体から 3 つの四面体 BEFG，BCDG，DEHG を取り除いてできる立体を K とする．辺 AE 上の点を通り，辺 AE に垂直な平面で K を切断したときの断面積の最大値を求めよ．

$\boxed{3}$ (2015 第 2 回京大オープン文系　平均 11.1 点/30 点)
$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 1$，$\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$ である直角二等辺三角形 ABC の内部に点 D があり，

$$\angle\mathrm{ADB} = \frac{\pi}{2},\ \angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{BCD}$$

である．三角形 ABD の面積を求めよ．

$\boxed{4}$ (2015 第 2 回京大オープン理系　平均 11.5 点/30 点)
xy 平面上に，点 (1，0) を通り傾きが $\tan\alpha$ の直線 l，点 (0，1) を通り傾きが $\tan\beta$ の直線 m がある．l と m が 1 点で交わり，α，β が

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2},\ \alpha > 0,\ \beta > 0$$

を満たして変化するとき，l と m の交点の軌跡を求め，図示せよ．

$\boxed{5}$ (2015 第 1 回京大オープン文系　平均 10.4 点/30 点)
平面上に，$\mathrm{OA} = 4$，$\mathrm{OB} = 3$，$\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形 OAB がある．点 C を，直線 AB に関して O と反対側に，三角形 ABC が $\angle\mathrm{BCA} = \dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形になるようにとる．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

$\boxed{6}$ (2014 第 2 回京大実戦理系　平均 7.5 点/35 点)
斜辺の長さが 1 である直角三角形 ABC の内心を I とする．$\left|\overrightarrow{\mathrm{AI}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{BI}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{CI}}\right|^2$ の最小値を求めよ．

$\boxed{7}$ (2014 第 2 回京大オープン文系　平均 6.7 点/30 点)
底面が平行四辺形 ABCD である四角錐 OABCD があり，辺 OD の中点を E とする．辺 OA 上 (O を除く) の点 P，辺 OC 上 (O を除く) の点 Q が 4 点 B，P，E，Q が同一平面上にあるように動くとき，三角形 OPQ の面積の最小値を三角形 OAC の面積 S を用いて表せ．

$\boxed{8}$ (2013 第 2 回京大オープン文理共通　平均文系 8.7 点/30 点，理系 10.3 点/30 点) 四面体があり，1 つの面の三角形の重心 G と他の 3 つの面の三角形の外心 K_1，K_2，K_3 を考える．線分 GK_1，GK_2，GK_3 がそれぞれ四面体のある辺と平行になるとき，四面体は正四面体であることを証明せよ．

$\boxed{9}$ (2009 第 2 回京大オープン理系　平均 3.4 点/35 点)
空間に 4 点 A，B，C，D があり，どの 3 点も同一直線上にはない．
線分 AB の中点を M，線分 CD の中点を N とし，

$$\mathrm{AC} = \mathrm{MN} = \mathrm{BD}$$

が成り立つとき，4 点 A，B，C，D は平行四辺形の 4 頂点であることを示せ．

$\boxed{10}$ (2009 第 1 回京大オープン理系　平均 6.9 点/35 点)
平面上に，AB = 2 を満たす 2 定点 A，B がある．線分 AB を直径とする円周上 (点 A，B は除く) を動く点 P について，線分 PA を 1 : 2 に外分する点を M，線分 PB を 3 : 2 に外分する点を N とし，直線 AN と直線 BM の交点を Q とする．このとき，Q の軌跡を求めよ．

2　東京大学編

$\boxed{11}$ (2012 第 2 回東大実戦文系　平均 4.0 点/20 点)
AB = $2x$，AD = 2 である長方形 ABCD がある．ただし，$0 < x < 1$ とする．辺 AB，BC，CD，DA の中点をそれぞれ K，L，M，N とし，この長方形 ABCD を，頂点 A，B，C，D が同一の点に重なるように，線分 KL，LM，MN，NK，LN で折り曲げて立体を作る．この立体の体積の最大値を求めよ．

$\boxed{12}$ (2005 第 2 回東大オープン文系　平均 3.7 点/20 点)
a，b，c を正の数とする．O を原点とする xy 平面上の 3 点 A$(a,\ 0)$，B$(0,\ \sqrt{3}a)$，C$(b,\ c)$ は，次の条件 (i)，(ii) を満たしている．

(i) 点 C は，直線 AB に関して O と反対側にある．
(ii) 四角形 OACB の面積は 1 である．

このとき，AC + BC = l とする．
(1) a を固定して，b，c を (i)，(ii) を満たすように動かしたとき，l の最小値を a を用いて表せ．
(2) さらに a を動かしたときの l の最小値を求めよ．

$\boxed{13}$ (2005 第 1 回東大オープン文理共通　平均文系 3.7 点/20 点，理系 5.8 点/20 点)
xy 平面上に定点 A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 0)$ と動点 P がある．P は領域 $y > 0$ にあり，

$$\angle\mathrm{PBA} - \angle\mathrm{PAB} = 60^\circ$$

を満たしながら動くものとする．点 P の x 座標が最小となるときの点 P の座標を求めよ．

$\boxed{14}$ (2011 第 2 回東大実戦文系　平均 6.3 点/20 点)
$t > 0$ を満たす実数 t に対して，xy 平面上の点 A，B を

$$\mathrm{A}(-1,\ t),\qquad \mathrm{B}\left(1,\ \frac{1}{t}\right)$$

と定める．t が $t > 0$ の範囲を動くとき，直線 AB の通りうる範囲を図示せよ．

$\boxed{15}$ (2010 第 2 回東大実戦文系　平均 7.4 点/20 点)
長さが 2 の線分 AB を直径とする半円の弧 AB 上に点 P をとり，AP を 1 辺とする正三角形 APQ をつくる．ただし，P は A，B と異なるものとする．このとき 2 つの三角形 ABP，APQ の面積の和の最大値を求めよ．