2018夏セミ　東大京大阪大への理系数学②「整数問題と確率」って、いちばん楽しい分野やんけ。
全問やりたいけど、時間がないので涙を呑んで奇数番目だけ解説します。偶数番目は自分でやっとこう。

$\boxed{1}$ [2007 神戸薬科大]

2 次方程式 $x^2+(2m+5)x+(m+3)=0$ が整数の解をもつための整数 m の値をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ [2007 一橋大]

m を整数とし，$f(x)=x^3+8x^2+mx+60$ とする。

(1) 整数 a と，0 ではない整数 b で，$f(a+bi)=0$ を満たすものが存在するような m をすべて求めよ。ただし，i は虚数単位である。

(2) (1) で求めたすべての m に対して，方程式 $f(x)=0$ を解け。

$\boxed{3}$ [2006 九州大]

2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，$a_1=b_1=1$ および，関係式

$$a_{n+1}=2a_nb_n,\ b_{n+1}=2{a_n}^2+{b_n}^2$$

を満たすものとする。

(1) $n\geqq 3$ のとき，a_n は 3 で割り切れるが，b_n は 3 で割り切れないことを示せ。

(2) $n\geqq 2$ のとき，a_n と b_n は互いに素であることを示せ。

$\boxed{4}$ [2002 東京大]

n は正の整数とする．x^{n+1} を x^2-x-1 で割った余りを a_nx+b_n とおく．

(1) 数列 a_n，b_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ は $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_n \end{cases}$ を満たすことを示せ．

(2) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，a_n，b_n はともに正の整数で，互いに素であることを証明せよ．

$\boxed{5}$ [2006 早稲田大]

次の各問いに答えよ。ただし，正の整数 n と整数 k $(0\leqq k\leqq n)$ に対して，${}_n\mathrm{C}_k$ は正の整数である事実を使ってよい。

(1) m が 2 以上の整数のとき，${}_m\mathrm{C}_2$ が m で割り切れるための必要十分条件を求めよ。

(2) p を 2 以上の素数とし，k を p より小さい正の整数とする。このとき，${}_p\mathrm{C}_k$ は p で割り切れることを示せ。

(3) p を 2 以上の素数とする。このとき，任意の正の整数 n に対し，$(n+1)^p-n^p-1$ は p で割り切れることを示せ。

$\boxed{6}$ [2009 東京大]

自然数 $m\geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数 ${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，……，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1) m が素数ならば，$d_m=m$ であることを示せ。

(2) すべての自然数 k に対し，k^m-k が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法によって示せ。

$\boxed{7}$ [2006 京都大]

2 以上の自然数 n に対し，n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ。

$\boxed{8}$ [2013 早稲田大]

整数 p，q に対して，多項式

$f(x)=2x^4+(p+2q)x^3+(pq+4)x^2+(2p+2)x+p$ を考える。$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ がすべて素数のとき，p，q の値を求めよ。

2018夏セミ　東大京大阪大への理系数学②「整数問題と確率」って、いちばん楽しい分野やんけ。
全問やりたいけど、時間がないので涙を呑んで奇数番目だけ解説します。偶数番目は自分でやっとこう。

$\boxed{9}$ [2001 神戸大]

(1) a，b，c を整数とする．x に関する 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が有理数の解をもつならば，その解は整数であることを示せ．ただし，正の有理数は 1 以外の公約数をもたない 2 つの自然数 m，n を用いて $\dfrac{n}{m}$ と表せることを用いよ．

(2) 方程式 $x^3+2x^2+2=0$ は，有理数の解をもたないことを背理法を用いて示せ．

$\boxed{10}$ [2000 愛媛大]

p，q を整数とし，$f(x)=x^2+px+q$ とおく．

(1) 有理数 a が方程式 $f(x)=0$ の 1 つの解ならば，a は整数であることを示せ．

(2) $f(1)$ も $f(2)$ も 2 で割り切れないとき，方程式 $f(x)=0$ は整数の解をもたないことを示せ．

$\boxed{11}$ [2013 早稲田大]

自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ が等式 $x^2+y^2=z^2$ を満たすとする。

(1) すべての自然数 n について，n^2 を 4 で割ったときの余りは 0 か 1 のいずれかであることを示せ。

(2) x と y の少なくとも一方が偶数であることを示せ。

(3) x が偶数，y が奇数であるとする。このとき，x が 4 の倍数であることを示せ。

$\boxed{12}$ [2010 千葉大]

(1) $3^n=k^3+1$ を満たす正の整数の組 $(k,\ n)$ をすべて求めよ。

(2) $3^n=k^2-40$ を満たす正の整数の組 $(k,\ n)$ をすべて求めよ。

$\boxed{13}$ [2014 一橋大]

$a-b-8$ と $b-c-8$ が素数となるような素数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

$\boxed{14}$ [2016 京都大]

素数 p，q を用いて p^q+q^p と表される素数をすべて求めよ。

$\boxed{15}$ [2000 大阪女子大]

(1) $4m+6n=7$ を満たす整数 m，n は存在しないことを示せ．

(2) $3m+5n=2$ を満たすすべての整数の組 $(m,\ n)$ を求めよ．

以下，a，b は互いに素な正の整数とする．

(3) k を整数とするとき，ak を b で割った余りを $r(k)$ で表す．k，l を $b-1$ 以下の正の整数とするとき，$k \neq l$ ならば $r(k) \neq r(l)$ であることを示せ．

(4) $am+bn=1$ を満たす整数 m，n が存在することを示せ．

$\boxed{16}$ [2008 奈良県立医科大]

p，q を互いに素な正の整数とする。

(1) 任意の整数 x に対して，p 個の整数 $x-q$，$x-2q$，……，$x-pq$ を p で割った余りはすべて相異なることを証明せよ。

(2) $x>pq$ なる任意の整数 x は，適当な正の整数 a，b を用いて $x=pa+qb$ と表せることを証明せよ。

2018夏セミ　東大京大阪大への理系数学②「整数問題と確率」って、いちばん楽しい分野やんけ。
全問やりたいけど、時間がないので涙を呑んで奇数番目だけ解説します。偶数番目は自分でやっとこう。

$\boxed{17}$ [2003 山口大]

m 個の玉すべてを 3 つの袋 A，B，C に分けて入れる．このとき，玉は区別しないものとし，また玉の入っていない袋があってもよいものとする．また，袋 A，B，C に入れる玉の数をそれぞれ x，y，z とする．

(1)　$m=18$ のとき，$x>y>z\geqq 0$ を満たす入れ方は何通りあるか．

(2)　$m=6n$ のとき，$x>y>z\geqq 0$ を満たす入れ方は何通りあるか，n を用いて表せ．ただし，n は自然数とする．

$\boxed{18}$ [2007 京都大]

得点 1，2，……，n が等しい確率で得られるゲームを独立に 3 回くり返す。このとき，2 回目の得点が 1 回目の得点以上であり，さらに 3 回目の得点が 2 回目の得点以上となる確率を求めよ。

$\boxed{19}$ [2006 名古屋大]

k を 2 以上の整数とする。硬貨を繰り返し投げて，表の出た回数が k 回になるか，あるいは，裏の出た回数が k 回になった時点で終了する。

(1)　$k\leqq n\leqq 2k-1$ を満たす整数 n に対して，ちょうど n 回で終了する確率 p_n を求めよ。

(2)　$k\leqq n\leqq 2k-2$ を満たす整数 n に対して，$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$ を求めよ。

(3)　p_n を最大にする n を求めよ。

$\boxed{20}$ [1996 関西大]

n を 3 以上の整数とする．袋の中に n 枚のカードがあり，1 枚は両面とも赤，1 枚は両面とも白，他の $(n-2)$ 枚は片面が赤で片面が白のカードである．この袋から 2 枚のカードを同時に抜き出し，無作為にテーブルに並べる．このとき，2 枚のカードの上の面がともに赤であるという事象を A, 下の面がともに白であるという事象を B, 下の面が赤白 1 枚ずつであるという事象を C とする．

(1)　事象 A の起こる確率 $P(\mathrm{A})$ を求めよ．

(2)　事象 A が起こったとき，事象 B の起こる確率 $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ を求めよ．

(3)　事象 A が起こったとき，事象 C の起こる確率を $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})$ とする．$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ と $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})$ の大小を比較せよ．

$\boxed{21}$ [1999 一橋大]

2 つの箱 A，B のそれぞれに赤玉が 1 個，白玉が 3 個，合計 4 個ずつ入っている．1 回の試行で箱 A の玉 1 個と箱 B の玉 1 個を無作為に選び交換する．この試行を n 回繰り返した後，箱 A に赤玉が 1 個，白玉が 3 個入っている確率 p_n を求めよ．

$\boxed{22}$ [2016 一橋大]

硬貨が 2 枚ある。最初は 2 枚とも表の状態で置かれている。次の操作を n 回行った後，硬貨が 2 枚とも裏になっている確率を求めよ。

[操作]　2 枚とも表，または 2 枚とも裏のときには，2 枚の硬貨両方を投げる。
　　表と裏が 1 枚ずつのときには，表になっている硬貨だけを投げる。

$\boxed{23}$ [2002 一橋大]

最初の試行で 3 枚の硬貨を同時に投げ，裏が出た硬貨を取り除く．次の試行で残った硬貨を同時に投げ，裏が出た硬貨を取り除く．以下この試行をすべての硬貨が取り除かれるまで繰り返す．

(1)　試行が 1 回目で終了する確率 p_1，および 2 回目で終了する確率 p_2 を求めよ．

(2)　試行が n 回以上行われる確率 q_n を求めよ．

$\boxed{24}$ [1998 一橋大]

H 大学には 4 つの食堂があり，A 君と B さんは，それぞれ毎日正午に，前日とは異なる 3 つの食堂のうち 1 つを無作為に選んで昼食をとることにしている．最初の日，2 人は別々の食堂で食事をしたとして，次の確率を求めよ．

(1)　n 日後に，初めて 2 人が食堂で出会う確率．ただし，$n\geqq 1$ とする．

(2)　n 日後に，2 人が食堂で出会うのがちょうど 2 回目である確率．ただし，$n\geqq 2$ とする．