２０１９　夏期セミナー　高１男子英数S　（担当　赤阪正純）
「複素数と方程式」（複素数の性質 $\boxed{1}$〜$\boxed{5}$ 高次方程式 $\boxed{6}$〜$\boxed{12}$）　「式と証明」（相加相乗平均 $\boxed{13}$〜$\boxed{18}$ 等式･不等式の証明 $\boxed{19}$〜$\boxed{24}$）
「基礎」は予習してきてください。「基礎」を軽く解説した後、「標準」をメインにやります。

$\boxed{1}$ [2012 大阪経済大]基礎

3 次方程式 $x^3-x^2+ax+b=0$ が $1+2i$ を解にもつとき，実数 a，b の値を求めよ。

$\boxed{2}$ [2011 岡山理科大]基礎

k を 0 と異なる実数の定数とし，i を虚数単位とする。等式

$$x^2+(3+2i)x+k(2+i)^2=0$$

を満たす実数 x が 1 つ存在するとし，それを α とおく。

(1)　k と α の値を求めよ。

(2)　この等式を満たす複素数をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ [2000 大阪大]標準

p，q を実数，$q\neq 0$ とする．$p+qi$ ($i=\sqrt{-1}$ は虚数単位) が方程式 $x^3+px+10=0$ の解であるとき，p，q の値を求めよ．

$\boxed{4}$ [2016 立命館大]標準

$x=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とするとき，x^2+x+1 の値は ア$\boxed{}$ である。また，x^3 の値は イ$\boxed{}$ である。

次に，n を 3 以上の自然数とするとき，整式 x^{2n} を x^2+x+1 で割った余りを求めると，$n=3k$ のときは ウ$\boxed{}$，$n=3k+1$ のときは エ$\boxed{}$，$n=3k+2$ のときは オ$\boxed{}$ となる。ただし，k は自然数とする。

$\boxed{5}$ [2003 京都大]応用

多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ は多項式 x^2+x+1 で割り切れるか.

$\boxed{6}$ [2017 東京電機大]基礎

方程式 $x^3+3x^2-(k-7)x+k-11=0$ が，ちょうど 2 つの実数解をもつときの実数 k の値を求めよ。

$\boxed{7}$ [2012 東京都市大]基礎

a，b を定数とする。整式 $P(x)=x^3-ax^2+b$ が $x-1$ で割り切れるとき，次の問いに答えよ。

(1)　b を a で表せ。

(2)　x の方程式 $P(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつような a の範囲を求めよ。

$\boxed{8}$ [2011 公立はこだて未来大]標準

(1)　3 次方程式 $x^3-2x^2+2x-1=0$ を複素数の範囲で解け。

(2)　(1) の 3 次方程式の 3 つの解を α，β，γ とするとき，$\alpha-1$，$\beta-1$，$\gamma-1$ を解にもつ 3 次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ の定数 p，q，r の値を求めよ。

(3)　(1) の 3 次方程式の 3 つの解を α，β，γ とするとき，$\dfrac{1}{\alpha}+1$，$\dfrac{1}{\beta}+1$，$\dfrac{1}{\gamma}+1$ を解にもつ 3 次方程式 $x^3+p'x^2+q'x+r'=0$ の定数 p'，q'，r' の値を求めよ。

$\boxed{9}$ [2013 横浜国立大]標準

実数 a，x，y，z が $\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2-2a+14 \\ x^3+y^3+z^3=a^3-3a^2+3a+18 \end{cases}$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　$xy+yz+zx$ および xyz を a の式で表せ。

(2)　x，y，z のうち少なくとも 2 つが等しいとき，a，x，y，z を求めよ。

$\boxed{10}$ [2003 大阪大]標準

定数 p，q，r は $p>q>r$ を満たしている．また，3 次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ の解は，連続する 3 つの整数 $n-1$，n，$n+1$ であるとする．このとき，n の値と p，q，r の値を定めよ．

$\boxed{11}$ [2001 一橋大]応用

a，b を整数とする．3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-1=0$ は 3 つの実数解 α，β，γ をもち，$0<\alpha<\beta<\gamma<3$ で，α，β，γ のうちどれかは整数である．a，b の値を求めよ．

$\boxed{12}$ [2002 京都大]応用

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ は整数を係数とする x の 4 次式とする．4 次方程式 $f(x)=0$ の重複も含めた 4 つの解のうち，2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという．このとき a，b，c の値を求めよ．

13 [2015 大阪工業大]基礎

$x>0$ のとき，$x+\dfrac{1}{x}$ の最小値は ア［　　］であり，$x>1$ のとき，$x+\dfrac{2}{x-1}$ の最小値は イ［　　］である。

14 [2001 東京工科大]基礎

$x>3$ のとき，$\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ.

15 [2016 大阪経済大]基礎

$a>0$，$b>0$ であるとき，$\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+\dfrac{8}{a}\right)$ の最小値は［　　］である。

16 [2012 東京大]標準

実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 O$(0,\ 0)$，A$(0,\ 1)$，B$(1,\ 0)$，C$(t,\ 0)$ を考える。また線分 AB 上の点 D を $\angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{BCD}$ となるように定める。t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ。

17 [2017 福島大]標準

a，b を正の定数とする。座標平面上の点 $(a,\ b)$ を通る直線 ℓ が，x 軸の正の部分および y 軸の正の部分と交わるように動くとする。x 軸，y 軸および直線 ℓ で囲まれる三角形の面積が最小になるような直線 ℓ の方程式を求めよ。

18 [2005 岩手大]応用

直方体の体積を k^3 とし，その直方体の縦，横，高さをそれぞれ，a，b，h とする。

(1)　直方体の体積 k^3 と高さ h を固定したとき，対角線の長さの 2 乗の最小値を求めよ。

(2)　体積が k^3 である直方体の中で，対角線の長さが最小となるのは立方体であることを示せ。

19 基礎

(1)　$a+b+c+d=0$ のとき，等式 $a^3+b^3+c^3+d^3=3(a+d)(b+d)(c+d)$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　$x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ のとき，x，y，z のうち少なくとも 1 つは 1 に等しいことを示せ。

20 [2009 東北大]基礎

a，b，c を実数とする。

(1)　$a+b=c$ であるとき，$a^3+b^3+3abc=c^3$ が成り立つことを示せ。

(2)　$a+b\geqq c$ であるとき，$a^3+b^3+3abc\geqq c^3$ が成り立つことを示せ。

21 [2006 甲南大]基礎

$a>\sqrt{2}$ を満たすとき，次の 3 つの数を，小さい方から順に並べよ。

$$\frac{a+2}{a+1},\ \frac{a}{2}+\frac{1}{a},\ \sqrt{2}$$

22 [2010 岐阜聖徳学園大]標準

次の問いに答えよ。

(1)　a，b，x，y が正の実数で $a+b=1$ のとき次の不等式を示せ。

$$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}\leqq\sqrt{ax+by}$$

(2)　x，y，z が正の実数のとき次の不等式を示せ。

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{3}\leqq\sqrt{\frac{x+y+z}{3}}$$

23 [2014 福井大]標準

(1)　$p>1$，$q>1$ のとき，不等式 $p+q<pq+1$ を証明せよ。

(2)　$a>1$，$b>1$ のとき，不等式 $\sqrt{a+b-1}<\sqrt{a}+\sqrt{b}-1$ を証明せよ。

(3)　$a>1$，$b>1$，$c>1$ のとき，不等式 $\sqrt{a+b+c-2}<\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-2$ を証明せよ。

24 [2008 大阪市立大]標準

(1)　実数 x，y に対し $(1+x)(1+y)\leqq\left(1+\dfrac{x+y}{2}\right)^2$ を示せ。また，等号が成立するのはどのようなときか。

(2)　a，b，c，d を -1 以上の数とするとき

$$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)\leqq\left(1+\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$$

を示せ。また，等号が成立するのはどのようなときか。