2019　夏期セミナー　高2　東大京大阪大への数学（文理共通）「思考力を鍛える数列」　（担当　赤阪）
１日目　数列全般（$\boxed{1}$〜$\boxed{8}$）　２日目　漸化式と帰納法（$\boxed{9}$〜$\boxed{16}$）　３日目　確率漸化式（$\boxed{17}$〜$\boxed{28}$）
基礎は予習で済ませておいてください。標準をメインにやります。応用は意欲的な人が各自で。

$\boxed{1}$ [2009 信州大]基礎

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2$，$\sum_{k=1}^{n} b_k = 2^n$ を満たすものとする。このとき，次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2$　(2) $\sum_{k=1}^{n} (b_k)^2$　(3) $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$

$\boxed{2}$ [1996 千葉大]標準

$a_1=1$，$a_2=a_3=a_4=3$，$a_5=a_6=a_7=a_8=a_9=5$，$a_{10}=a_{11}=\cdots\cdots=a_{16}=7,\cdots\cdots$
で定義される数列 $\{a_n\}$ がある．このとき

(1) 自然数 n に対して，$a_k=2n-1$ を満たす番号 k のとる値の範囲を求めよ．

(2) a_{1996} を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 n^2 項までのうち，奇数番目の項全体の和 S を求めよ．

$\boxed{3}$ [2016 慶応義塾大]標準

自然数 n に対して $m \leqq \log_2 n < m+1$ を満たす整数 m を a_n で表すことにする。このとき $a_{2016}=$ ア $\boxed{}$ である。また，自然数 k に対して $a_n=k$ を満たす n は全部で イ $\boxed{}$ 個あり，そのような n のうちで最大のものは $n=$ ウ $\boxed{}$ である。更に，$\sum_{n=1}^{2016} a_n=$ エ $\boxed{}$ である。

$\boxed{4}$ [2011 宮崎大]標準

自然数 n について，a_n を $\sqrt{n}$ 以下の整数のうち最大のものとするとき，次の問いに答えよ。

(1) a_1，a_2，a_3，a_4 の値を求めよ。

(2) 自然数 m について，$S=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{m^2}$ を，m を用いて表せ。

$\boxed{5}$ [2007 横浜国立大]標準

k を自然数とするとき，$x<y<k<x+y$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ の個数を a_k とする。

(1) a_7，a_8 を求めよ。

(2) n を自然数とするとき，a_{2n-1}，a_{2n} を n の式で表せ。

(3) n を自然数とするとき，$\sum_{k=1}^{2n} a_k$ を n の式で表せ。

$\boxed{6}$ [2010 京都大]標準

数列 $\{a_n\}$ は，すべての正の整数 n に対して $0 \leqq 3a_n \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k$ を満たしているとする。このとき，すべての n に対して $a_n=0$ であることを示せ。

$\boxed{7}$ [2013 京都大]応用

N を 2 以上の自然数とし，$a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を次の性質 (A)，(B) を満たす数列とする。

(A) $a_1=2^N-3$,

(B) $n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対して，

a_n が偶数のとき $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}$，a_n が奇数のとき $a_{n+1}=\dfrac{a_n-1}{2}$。

このときどのような自然数 M に対しても

$$\sum_{n=1}^{M} a_n \leqq 2^{N+1}-N-5$$

が成り立つことを示せ。

$\boxed{8}$ [2006 山形大]応用

n を自然数とする。n 個の実数 a_1，a_2，$\cdots\cdots$，a_n が

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots\cdots \geqq a_n \geqq 0,\ \sum_{k=1}^{n} a_k = 1$$

を満たすとき，$1 \leqq l \leqq n$ であるすべての自然数 l に対して $\dfrac{l}{n} \leqq \sum_{k=1}^{l} a_k \leqq 1$ が成り立つことを示せ。

2019　夏期セミナー　高2　東大京大阪大への数学（文理共通）「思考力を鍛える数列」　（担当　赤阪）
１日目　数列全般（$\boxed{1}$〜$\boxed{8}$）　２日目　漸化式と帰納法（$\boxed{9}$〜$\boxed{16}$）　３日目　確率漸化式（$\boxed{17}$〜$\boxed{28}$）
基礎は予習で済ませておいてください。標準をメインにやります。応用は意欲的な人が各自で。

$\boxed{9}$ [2003 京都大]基礎

正の数からなる数列 $\{a_n\}$ が，次の条件[A]，[B]を満たすとき，$\sum_{k=1}^{n} a_k$ の値を求めよ．

[A]　$a_1=1$　　[B]　$\log a_n-\log a_{n-1}=\log(n-1)-\log(n+1)$ $(n\geqq 2)$

$\boxed{10}$ [2002 京都大]基礎

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n と表す．この数列が $a_1=0$，$a_2=1$，$(n-1)^2a_n=S_n$ $(n\geqq 1)$ を満たすとき，一般項 a_n を求めよ．

$\boxed{11}$ [2017 大阪大]標準

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=2,\ a_{n+1}=8{a_n}^2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　$b_n=\log_2 a_n$ とおく。b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

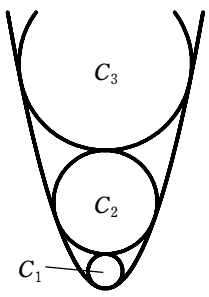
(2)　数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　$P_n=a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n$ とおく。数列 $\{P_n\}$ の一般項を求めよ。

(4)　$P_n>10^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ。

$\boxed{12}$ [2004 大阪大]標準

座標平面上で不等式 $y\geqq x^2$ の表す領域を D とする．D 内にあり y 軸上に中心をもち原点を通る円のうち，最も半径の大きい円を C_1 とする．自然数 n について，円 C_n が定まったとき，C_n の上部で C_n に外接する円で，D 内にある y 軸上に中心をもつもののうち，最も半径の大きい円を C_{n+1} とする．C_n の半径を a_n とし，$b_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ とする．



(1)　a_1 を求めよ．

(2)　$n\geqq 2$ のとき a_n を b_{n-1} で表せ．

(3)　a_n を n の式で表せ．

$\boxed{13}$ [2011 京都大]標準

n は 2 以上の整数であり，$\frac{1}{2}<a_j<1$ $(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ であるとき，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)$$

が成立することを示せ。

$\boxed{14}$ [1997 東京大]標準

a, b は実数で $a^2+b^2=16, a^3+b^3=44$ を満たしている．

(1)　$a+b$ の値を求めよ．

(2)　n を 2 以上の整数とするとき，a^n+b^n は 4 で割り切れる整数であることを示せ．

$\boxed{15}$ [2011 九州大]応用

数列 a_1，a_2，……，a_n，…… は

$$a_{n+1}=\frac{2a_n}{1-{a_n}^2},\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$$

を満たしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$a_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき，a_{10} および a_{11} を求めよ。

(2)　$\tan\frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3)　$a_1=\tan\frac{\pi}{7}$ とする。$a_k=a_1$ を満たす 2 以上の自然数 k で最小のものを求めよ。

$\boxed{16}$ [2011 東京大]応用

実数 x の小数部分を，$0\leqq y<1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x\rangle$ で表す。実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を次のように順次定める。

(i)　$a_1=\langle a\rangle$

(ii)　$\begin{cases} a_n\neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1}=\left\langle\frac{1}{a_n}\right\rangle \\ a_n=0 \text{ のとき，} a_{n+1}=0 \end{cases}$

(1)　$a=\sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n=a$ となるような $\frac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

2019　夏期セミナー　高2　東大京大阪大への数学（文理共通）「思考力を鍛える数列」　（担当　赤阪）
１日目　数列全般（$\boxed{1}$〜$\boxed{8}$）　２日目　漸化式と帰納法（$\boxed{9}$〜$\boxed{16}$）　３日目　確率漸化式（$\boxed{17}$〜$\boxed{28}$）
基礎は予習で済ませておいてください。標準をメインにやります。応用は意欲的な人が各自で。

$\boxed{17}$ [2014 大分大]基礎

正三角形 ABC があり，点 X は正三角形 ABC の頂点を移動する点である。サイコロを投げて 5 の目が出たとき点 X は時計回りに隣の頂点に移動し，6 の目が出たとき点 X は反時計回りに隣の頂点に移動し，それ以外の目が出たとき点 X は移動しない。はじめに点 X は頂点 A にあるとし，サイコロを n 回投げたとき点 X が頂点 A にある確率を P_n とする。

(1)　P_1，P_2，P_3 を求めよ。　(2)　P_{n+1} を P_n を用いて表せ。

(3)　P_n を求めよ。

$\boxed{18}$ [2007 京都大]基礎

四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD を考える。点 P は時刻 0 では頂点 O にあり，1 秒ごとに次の規則に従ってこの四角錐の 5 つの頂点のいずれかに移動する。

規則：点 P のあった頂点と 1 つの辺によって結ばれる頂点の 1 つに，等しい確率で移動する。

このとき，n 秒後に点 P が頂点 O にある確率を求めよ。

$\boxed{19}$ [1999 一橋大]基礎

3 つの文字 a，b，c を繰り返しを許して，左から順に n 個並べる．ただし，a の次は必ず c であり，b の次も必ず c である．このような規則を満たす列の個数を x_n とする．
例えば，$x_1=3$，$x_2=5$ である．

(1)　x_{n+2} を x_{n+1} と x_n で表せ．

(2)　$y_n=x_{n+1}+x_n$ とおく．y_n を求めよ．

(3)　x_n を求めよ．

$\boxed{20}$ [2014 大阪大]標準

さいころを繰り返し投げ，n 回目に出た目を X_n とする。n 回目までに出た目の積 $X_1X_2\cdots\cdots X_n$ を T_n で表す。T_n を 5 で割った余りが 1 である確率を p_n とし，余りが 2，3，4 のいずれかである確率を q_n とする。

(1)　p_n+q_n を求めよ。

(2)　p_{n+1} を p_n と n を用いて表せ。

(3)　$r_n=\left(\dfrac{6}{5}\right)^n p_n$ とおいて r_n を求めることにより，p_n を n の式で表せ。

$\boxed{21}$ [2017 京都大]標準

n を自然数とする。n 個の箱すべてに $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ計 5 枚入っている。おのおのの箱から 1 枚ずつカードを取り出し，取り出した順に左から並べて n 桁の数 X を作る。このとき，X が 3 で割り切れる確率を求めよ。

$\boxed{22}$ [2005 京都大]標準

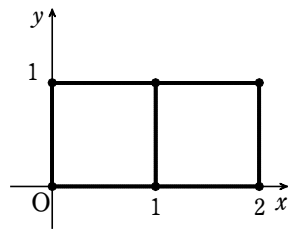
先頭車両から順に 1 から n までの番号のついた n 両編成の列車がある。ただし $n\geqq 2$ とする。各車両を赤色，青色，黄色のいずれか 1 色で塗るとき，隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような色の塗り方は何通りか。

$\boxed{23}$ [2014 京都大]標準

2 つの粒子が時刻 0 において △ABC の頂点 A に位置している。これらの粒子は独立に運動し，それぞれ 1 秒ごとに隣の頂点に等確率で移動していくとする。たとえば，ある時刻で点 C にいる粒子は，その 1 秒後には点 A または点 B にそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する。この 2 つの粒子が，時刻 0 の n 秒後に同じ点にいる確率 $p(n)$ を求めよ。

$\boxed{24}$ [2016 京都大]標準

xy 平面上の 6 個の点 (0，0)，(0，1)，(1，0)，(1，1)，(2，0)，(2，1) が図のように長さ 1 の線分で結ばれている。動点 X は，これらの点の上を次の規則に従って 1 秒ごとに移動する。



規則：動点 X は，そのときに位置する点から出る長さ 1 の線分によって結ばれる図の点のいずれかに，等しい確率で移動する。

例えば，X が (2，0) にいるときは，(1，0)，(2，1) のいずれかに $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する。

また X が (1，1) にいるときは，(0，1)，(1，0)，(2，1) のいずれかに $\dfrac{1}{3}$ の確率で移動する。時刻 0 で動点 X が O＝(0，0) から出発するとき，n 秒後に X の x 座標が 0 である確率を求めよ。ただし n は 0 以上の整数とする。

$\boxed{25}$ [1996 京都大]応用

n を 3 以上の整数とする．円周上の n 等分点のある点を出発点とし，n 等分点を一定の方向に次のように進む．各点でコインを投げ，表が出れば次の点に進み，裏が出れば次の点を跳び越してその次の点に進む．

(1)　最初に 1 周回ったとき，出発点を跳び越す確率 p_n を求めよ．

(2)　1 周目では出発点を跳び越し，2 周目に出発点を踏む確率 r_n を求めよ．

$\boxed{26}$ [2015 東京大]応用

投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインを 1 枚用意し，次のように左から順に文字を書く。コインを投げ，表が出たときは文字列 AA を書き，裏が出たときは文字 B を書く。更に繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って，AA，B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。例えば，コインを 5 回投げ，その結果が順に表，裏，裏，表，裏であったとすると，得られる文字列は，AABBAAB となる。このとき，左から 4 番目の文字は B，5 番目の文字は A である。

(1)　n を正の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2)　n を 2 以上の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。

$\boxed{27}$ [2004 東京大]応用

片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある．この 3 枚の板を机の上に横に並べ，次の操作を繰り返し行う．

さいころを振り，出た目が 1，2 であれば左端の板を裏返し，3，4 であればまん中の板を裏返し，5，6 であれば右端の板を裏返す．

たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば，色の並び方は「黒白白」となる．更に，2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば，色の並び方は「黒白黒」となる．

(1)　「白白白」から始めて，3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ．

(2)　「白白白」から始めて，n 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」または「白黒白」または「白白黒」となる確率を p_n とする．
p_{2k+1} (k は自然数) を求めよ．

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする．

$\boxed{28}$ [2007 名古屋大]応用

袋の中に赤と白の玉が 1 個ずつ入っている。「この袋から玉を 1 個取り出して戻し，出た玉と同じ色の玉を袋の中に 1 個追加する」という操作を N 回繰り返した後，赤の玉が袋の中に m 個ある確率を $p_N(m)$ とする。

(1)　$p_3(m)$ を求めよ。　(2)　一般の N に対し $p_N(m)$ を求めよ。