$\boxed{1}$ [2006 北海道大]

実数 x，y，z は $x \leqq y \leqq z \leqq 1$ かつ $4x+3y+2z=1$ を満たすとする。

(1) x の最大値と y の最小値を求めよ。

(2) $3x-y+z$ の値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ [2002 京都大]

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ は整数を係数とする x の 4 次式とする．4 次方程式 $f(x)=0$ の重複も含めた 4 つの解のうち，2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという．このとき a，b，c の値を求めよ．

$\boxed{3}$ [2002 東北大]

$t \geqq 1$ において，関数 $f(t)=\int_{-1}^{1}|(x-t+2)(x+t)|dx$ を最小にする t の値と，そのときの最小値を求めよ．

$\boxed{4}$ [2002 東北大]

四面体 ABCD は各辺の長さが 1 の正四面体とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=l\overrightarrow{\mathrm{AB}}+m\overrightarrow{\mathrm{AC}}+n\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ で与えられる点 P に対し $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|$ が成り立つならば，$l=m=n$ であることを示せ．また，このときの $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$ を l を用いて表せ．

(2) A，B，C，D のいずれとも異なる空間内の点 P と点 Q を，四面体 PBCD と四面体 QABC がともに正四面体になるようにとるとき，$\cos\angle\mathrm{PBQ}$ の値を求めよ．

$\boxed{5}$ [2009 千葉大]

1 から 9 までの番号を付けた 9 枚のカードがある。この中から無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し，カードに書かれた 4 つの番号の積を X とおく。

(1) X が 5 の倍数になる確率を求めよ。

(2) X が 10 の倍数になる確率を求めよ。

(3) X が 6 の倍数になる確率を求めよ。

$\boxed{6}$ [2003 一橋大]

(1)　正の整数 n で n^3+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ.

(2)　正の整数 n で n^n+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ.

$\boxed{7}$ [2007 早稲田大]

a を $a>\dfrac{1}{2}$ を満たす定数とする。$1\leqq x\leqq 2a$ のとき，$y=\left(\log_2\dfrac{x}{a}\right)\left(\log_2\dfrac{x^2}{a^2}\right)$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{8}$ [2009 大阪大]

曲線 C : $y=x^3-kx$ (k は実数) を考える。C 上に点 A$(a,\ a^3-ka)$ $(a\neq 0)$ をとる。
次の問いに答えよ。

(1)　点 A における C の接線を ℓ_1 とする。ℓ_1 と C の A 以外の交点を B とする。
B の x 座標を求めよ。

(2)　点 B における C の接線を ℓ_2 とする。ℓ_1 と ℓ_2 が直交するとき，a と k が満たす条件を求めよ。

(3)　ℓ_1 と ℓ_2 が直交する a が存在するような k の値の範囲を求めよ。

$\boxed{9}$ [2002 同志社大]

OA＝3，OB＝4，∠AOB＝60° である三角形 AOB を考える.
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする.

(1)　辺 AB の長さを求めよ.

(2)　∠AOB の 2 等分線上に点 P をとる．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m\vec{a}+n\vec{b}$ と表すとき，m を n で表せ.

(3)　辺 OA の中点を M，辺 OB の中点を N とする．M を通り辺 OA に垂直な直線と N を通り辺 OB に垂直な直線との交点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ.

(4)　線分 PQ の長さが最小となる $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ.

$\boxed{10}$ [2012 大阪府立大]

サイコロを n 回振って，数列 a_1，a_2，……，a_n を次のように定める。ただし，$n\geqq 3$ とする。

(A)　1 回目に 1 の目が出たときは $a_1=0$，それ以外の目が出たときは，$a_1=1$ とする。

$k\geqq 2$ のとき，

(B)　k 回目に 1 の目が出たときは，$a_k=0$ とする。

(C)　k 回目に 6 の目が出たときは，$a_k=a_{k-1}+k$ とする。

(D)　k 回目に 1 と 6 以外の目が出たときは，$a_k=a_{k-1}+1$ とする。

自然数 k $(1\leqq k\leqq n)$ に対して，$a_k=k$ となる確率を p_k とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　p_1，p_2，p_3 を求めよ。

(2)　p_k $(2\leqq k\leqq n)$ を p_{k-1} を用いて表せ。

(3)　p_k $(1\leqq k\leqq n)$ を k の式で表せ。

$\boxed{11}$ [2002 甲南大]

(1)　任意の実数 a に対して，不等式 $a^4+b^3 \geqq a^3+ab^3$ が成り立つような実数 b の値を定めよ.

(2)　任意の整数 a に対して，不等式 $a^4+b^3 \geqq a^3+ab^3$ が成り立つような整数 b の値を定めよ.

$\boxed{12}$ [2007 慶応義塾大]

(1)　$\cos 3\theta = f(\cos\theta)$ を満たす 3 次式 $f(x)$ と，$\cos 4\theta = g(\cos\theta)$ を満たす 4 次式 $g(x)$ を求めよ。また，多項式 $h(x)$ で，$(x-1)h(x) = g(x) - f(x)$ を満たすものを求めよ。

(2)　$h(x)$ を (1) で求めた多項式とする。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とするとき，$h(\cos\theta) = 0$ であるためには，$\theta = \dfrac{2\pi}{7}$ または $\dfrac{4\pi}{7}$ または $\dfrac{6\pi}{7}$ であることが必要十分であることを証明せよ。

(3)　$\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$ の値を求めよ。値だけでなく，なぜそうなるのかも書くこと。

$\boxed{13}$ [2011 筑波大]

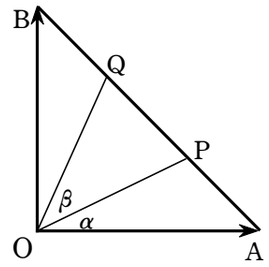
O を原点とする xy 平面において，直線 $y=1$ の $|x| \geqq 1$ を満たす部分を C とする。

(1)　C 上に点 A $(t,\ 1)$ をとるとき，線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ。

(2)　点 A が C 全体を動くとき，線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め，それを図示せよ。

$\boxed{14}$ [2006 広島大]

平面上で，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は直交し，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1$ を満たすとする。線分 AB を 3 等分し，図のように，A に近い点を P，B に近い点を Q とする。また，$\angle\mathrm{AOP} = \alpha$，$\angle\mathrm{POQ} = \beta$ とする。



(1)　$\cos\alpha$，$\cos\beta$ の値を求めよ。

(2)　$\alpha < 30^\circ < \beta$ を示せ。

(3)　線分 PQ 上に，点 R を $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるようにとる。

このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2$ を k の式で表せ。

(4)　(3) の R に対して，$\angle\mathrm{POR} = \alpha$ となるとき，k の値を求めよ。

$\boxed{15}$ [2012 千葉大]

さいころを n 回 $(n \geqq 2)$ 投げ，k 回目 $(1 \leqq k \leqq n)$ に出る目を X_k とする。

(1)　積 X_1X_2 が 18 以下である確率を求めよ。

(2)　積 $X_1X_2 \cdots\cdots X_n$ が偶数である確率を求めよ。

(3)　積 $X_1X_2 \cdots\cdots X_n$ が 4 の倍数である確率を求めよ。

(4)　積 $X_1X_2 \cdots\cdots X_n$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。

$\boxed{16}$ [2008 京都大]

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $2\sqrt{2}(\sin^3 x + \cos^3 x) + 3\sin x \cos x = 0$ を満たす x の個数を求めよ。

$\boxed{17}$ [2007 九州大]

a，b を正の数とし，空間内の 3 点 $\mathrm{A}(a,\ -a,\ b)$，$\mathrm{B}(-a,\ a,\ b)$，$\mathrm{C}(a,\ a,\ -b)$ を考える。A，B，C を通る平面を α，原点 O を中心とし A，B，C を通る球面を S とおく。

(1)　線分 AB の中点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DO}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であることを示せ。
また △ABC の面積を求めよ。

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$ のなす角を θ とするとき，$\sin\theta$ を求めよ。また，平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき，線分 OH の長さを求めよ。

(3)　点 P が球面 S 上を動くとき，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。ただし，P は平面 α 上にはないものとする。

$\boxed{18}$ [2010 大阪市立大]

実数 r に対し，$n \leqq r < n+1$ となる整数 n を $[r]$ と表すことにする。正の整数 m について，$f(m) = [m - \log_2(m+1)]$ とおく。

(1)　$m+1 = 2^s$ となる整数 s があれば，$f(m+1) = f(m)$ となることを示せ。

(2)　$m+1 = 2^s$ となる整数 s がなければ，$f(m+1) = f(m) + 1$ となることを示せ。

$\boxed{19}$ [2015 大阪市立大]

a，b は実数で $a > 0$ とする。円 $x^2 + y^2 = 1$ と放物線 $y = ax^2 + b$ の共有点の個数を m とおく。

(1)　$m = 2$ となるための a，b に関する必要十分条件を求めよ。

(2)　$m = 3$ となるための a，b に関する必要十分条件を求めよ。

(3)　$m = 4$ となるための a，b に関する必要十分条件を求めよ。

$\boxed{20}$ [2005 大阪府立大]

外見が同じである箱が 30 箱ある。このうちの 10 箱にはいずれも赤玉が 2 個，白玉が 6 個入っており，残りの 20 箱にはいずれも赤玉が 5 個，白玉が 3 個入っている。これらの箱から無作為に 1 箱選び，さらにその箱から無作為に 3 個の玉を一度に取り出す。

(1)　取り出す玉がすべて赤玉である確率を求めよ。

(2)　取り出す玉がすべて白玉である確率を求めよ。

(3)　取り出す玉のうち赤玉の個数が白玉の個数より多い確率を求めよ。

$\boxed{21}$ [2011 東北大]

実数 a に対し，不等式 $y \leqq 2ax - a^2 + 2a + 2$ の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく。

(1)　$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ。

(2)　$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ。

$\boxed{22}$ [2000 大阪市立大]

(1)　自然数 a，b，c，d に $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{a} + d$ の関係があるとき，a と c が互いに素ならば，a と b も互いに素であることを証明せよ.

(2)　任意の自然数 n に対し，$28n+5$ と $21n+4$ は互いに素であることを証明せよ.

$\boxed{23}$ [2007 大阪市立大]

a，b は定数とし，$0 < a < 1$ とする。関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + b$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の極値を求めよ。

(2)　区間 $-2 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値が 1，最小値が -5 となるような a，b の値を求めよ。

$\boxed{24}$ [2004 横浜市立大]

a は実数とする．3 次方程式

$$x^3 + 3ax^2 + 3ax + a^3 = 0$$

の異なる実数解の個数は，定数 a の値によってどのように変わるかを調べよ.

$\boxed{25}$ [2010 名古屋大]

初めに，A が赤玉を 1 個，B が白玉を 1 個，C が青玉を 1 個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の硬貨を投げ，表が出れば A と B の玉を交換し，裏が出れば B と C の玉を交換する，という操作を考える。この操作を n 回 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ 繰り返した後に A，B，C が赤玉を持っている確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とおく。

(1)　a_1，b_1，c_1，a_2，b_2，c_2 を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n で表せ。

(3)　a_n，b_n，c_n を求めよ。