２０１９年冬セミナー　東大京大阪大医学部への数学（担当　赤阪ま）　１日目 $\boxed{1}$～$\boxed{9}$ 円と直線　軌跡　２日目 $\boxed{10}$～$\boxed{13}$ 通過領域　３日目 $\boxed{14}$～$\boxed{20}$ 線形計画法の応用

基本問題をサラッと確認したのち、標準問題を中心にやります。頑張ってついてきてください。

$\boxed{1}$ [2006 愛媛大]パズル的な有名問題です。一瞬で答えられますか？

x 軸の正の部分を動く点 P$(t,\ 0)$ $(t>0)$ と 2 点 A$(0,\ 1)$，B$(0,\ 3)$ がある。

∠APB を最大にする点 P の座標を求めよ。

$\boxed{2}$ [2016 慶応義塾大]基本

座標平面上に 2 点 A$(-2,\ 4)$，B$(4,\ 2)$ および 2 つの直線 $\ell : x+y=1$，$m : x-y=3$ が与えられている。

(1)　点 P が直線 ℓ 上を動くとき，AP＋PB が最小となる P の座標は

$\left(\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\right)$ である。

(2)　点 P，Q がそれぞれ直線 ℓ，m 上を動くとき，AP＋PQ＋QB が最小となる P，Q の座標はそれぞれ $\left(\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\right)$，$\left(\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\right)$ である。

$\boxed{3}$ [2008 関西学院大]基本

xy 平面上の 2 直線 $tx-y=t$，$x+ty=-2t-1$ の交点 P の y 座標は $\boxed{\text{ア}}$ である。

t が任意の実数値をとって変わるとき P が描く図形は，方程式 $\boxed{\text{イ}}$ で表される曲線から点 $\boxed{\text{ウ}}$ を除いたものである。P の x 座標の最大値は $\boxed{\text{エ}}$ である。

基本問題をサラッと確認したのち、標準問題を中心にやります。頑張ってついてきてください。

$\boxed{4}$ [2000 大阪大]基本

$a>b>0$ とする．円 $x^2+y^2=a^2$ 上の点 $\left(b,\ \sqrt{a^2-b^2}\right)$ における接線と x 軸との交点を P とする．また，円の外部の点 $(b,\ c)$ からこの円に 2 本の接線を引き，接点を Q，R とする．このとき，2 点 Q，R を通る直線は P を通ることを示せ．

$\boxed{5}$ [2007 愛知教育大]標準

座標平面上に点 A (1, 0) を固定し，点 P を直線 $x+y=2$ 上に，点 Q を円 $x^2+y^2=1$ 上にそれぞれとる。このとき，線分の長さの和 AP＋PQ の最小値と，そのときの点 P, Q の座標を求めよ。

$\boxed{6}$ [2008 大阪教育大]標準

座標平面上の 2 点 Q (1, 1)，R $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に対して，点 P が円 $x^2+y^2=1$ の周上を動くとき，次の問いに答えよ。

(1)　△PQR の重心の軌跡を求めよ。

(2)　点 P から △PQR の重心までの距離が最小となるとき，点 P の座標を求めよ。

(3)　△PQR の面積の最小値を求めよ。

基本問題をサラッと確認したのち、標準問題を中心にやります。頑張ってついてきてください。

$\boxed{7}$ [2001 北海道大]標準

xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ へ，この円の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から 2 本の接線を引き，その接点を A，B とし，線分 AB の中点を Q とする.

(1)　点 Q の座標を a，b を用いて表せ.

(2)　点 P が円 $(x-3)^2+y^2=1$ の上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ.

$\boxed{8}$ [2009 群馬大]標準

点 $(5,\ 0)$ を通り，傾きが a の直線が円 $x^2+y^2=9$ と異なる 2 点 P，Q で交わるとき，次の問いに答えよ。

(1)　a の値の範囲を求めよ。

(2)　P と Q の中点を M とする。a を動かすとき，点 M の軌跡を求めよ。

$\boxed{9}$ [2011 秋田大]応用

円 C_1 : $x^2+y^2=25$ と円 C_2 : $(x-10)^2+(y-5)^2=50$ の 2 つの交点と原点を通る円を C_3 とする。

(1)　円 C_3 の中心と半径を求めよ。

(2)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が円 C_3 上を動くとき，$2y-x$ の最大値を求めよ。

(3)　円 C_1 と円 C_2 の 2 つの交点を通る円の中心の軌跡を求めよ。

(4)　円 C_1 と円 C_2 の 2 つの交点を通る円を C とする。点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ が円 C 上を動くとき，$2y-x$ の最大値が最小となる円 C の中心と半径を求めよ。

基本問題をサラッと確認したのち、標準問題を中心にやります。頑張ってついてきてください。

$\boxed{10}$ [2008 東京大]応用

座標平面上の 3 点 A$(1,\ 0)$，B$(-1,\ 0)$，C$(0,\ -1)$ に対し，$\angle$APC$=\angle$BPC を満たす点 P の軌跡を求めよ。ただし P$\neq$A，B，C とする。

$\boxed{11}$ [2003 北海道大]標準

xy 平面上の放物線 $A:y=x^2$，$B:y=-(x-a)^2+b$ は異なる 2 点 P$(x_1,\ y_1)$，Q$(x_2,\ y_2)$ $(x_1>x_2)$ で交わるとする．

(1)　$x_1-x_2=2$ が成り立つとき，b を a で表せ．

(2)　$x_1-x_2=2$ を満たしながら a，b が変化するとき，直線 PQ の通過する領域を求め図示せよ．

$\boxed{12}$ [2009 横浜国立大]標準

放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 P$(t,\ t^2)$，Q$(t+1,\ (t+1)^2)$ をとる。

(1)　t がすべての実数を動くとき，直線 PQ が通過する領域を図示せよ。

(2)　t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過する領域を図示せよ。

$\boxed{13}$ [2011 筑波大]標準

O を原点とする xy 平面において，直線 $y=1$ の $|x|\geqq 1$ を満たす部分を C とする。

(1)　C 上に点 A$(t,\ 1)$ をとるとき，線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ。

(2)　点 A が C 全体を動くとき，線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め，それを図示せよ。

$\boxed{14}$ [2018 東北大]標準

xy 平面における 2 つの放物線 $C:\ y=(x-a)^2+b$，$D:\ y=-x^2$ を考える。

(1)　C と D が異なる 2 点で交わり，その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a，b が動くとき，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡を図示せよ。

(2)　実数 a，b が (1) の条件を満たしながら動くとき，C と D の 2 交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め，図示せよ。

$\boxed{15}$ [2018 立命館大]基本

点 $(x,\ y)$ が連立不等式 $\begin{cases} x+y\geqq 2 \\ x^2+y^2\leqq 4 \end{cases}$ の表す領域 D を動くとき，次の問いに答えよ。

(1)　$-2x+y$ の最大値は ア $\boxed{}$，最小値は イ $\boxed{}$ である。

(2)　$2x+y$ の最大値は ウ $\boxed{}$，最小値は エ $\boxed{}$ である。

(3)　x^2+y^2-2x の最大値は オ $\boxed{}$，最小値は カ $\boxed{}$ である。

基本問題をサラッと確認したのち、標準問題を中心にやります。頑張ってついてきてください。

$\boxed{16}$ [2004 立教大]基本

(1)　連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2-4(x+y)+7\leqq 0 & \cdots\cdots ① \\ x+y\geqq 3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ の表す領域 D を図示せよ.

(2)　点 $(x,\ y)$ が D を動くとき，$\dfrac{y+1}{x-5}$ の最大値，最小値を求めよ.

$\boxed{17}$ [2006 成城大]標準

正の数 x，y が $(\log_2 x)^2+(\log_2 y)^2\leqq \log_2\dfrac{x^2}{2\sqrt{2}\,y^2}$ を満たしながら動くとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\log_2 x=X$，$\log_2 y=Y$ として，上式を X と Y で表せ。

(2)　点 $(X,\ Y)$ の存在範囲を図示せよ。

(3)　xy の最大値と，そのときの x と y の値を求めよ。

$\boxed{18}$ [2011 広島大]標準

次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$\begin{cases} x^2+y^2-1\leqq 0 \\ x+2y-2\leqq 0 \end{cases}$$

(1)　領域 D を図示せよ。

(2)　a を実数とする。点 $(x,\ y)$ が D を動くとき，$ax+y$ の最小値を a を用いて表せ。

(3)　a を実数とする。点 $(x,\ y)$ が D を動くとき，$ax+y$ の最大値を a を用いて表せ。

基本問題をサラッと確認したのち、標準問題を中心にやります。頑張ってついてきてください。

$\boxed{19}$ [1998 東京工業大]標準

$a>0$ とし，x，y が 4 つの不等式 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$2x+3y\leqq 12$，$ax+\left(4-\dfrac{3}{2}a\right)y\leqq 8$ を同時に満たしているとする．このとき，$x+y$ の最大値 $f(a)$ を求めよ．

$\boxed{20}$ [2006 東北大]応用

連立不等式 $x^2-6x+y^2+5\leqq 0$，$x+y\leqq 5$ の表す領域 D を図示せよ。
また，曲線 $x^2+y^2-2ax-2y+a^2=0$ が D の点を通るような実数 a の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{21}$ [2004 東京大]応用

a を正の実数とする．次の 2 つの不等式を同時に満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる領域を D とする．

$$y\geqq x^2,\quad y\leqq -2x^2+3ax+6a^2$$

領域 D における $x+y$ の最大値，最小値を求めよ．