$\boxed{1}$ [2008 早稲田大]おまけ

正三角形 ABC の内部にある点を P とする。

PA＝1，PB＝2，∠APB＝120° のとき，PC の長さを求めよ。

$\boxed{2}$ [1998 三重大]

△ABC の重心 G を通る直線が辺 AB，辺 AC と交わっている．この直線と辺 AB との交点を P，辺 AC との交点を Q とおき，定数 k, l を $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ}=l\overrightarrow{AC}$ により定める．

(1) $\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{l}=3$ が成り立つことを示せ．

(2) $k+l=\dfrac{27}{20}$ のときの k, l の値を求めよ．更に，△ABC と △APQ の面積の比を求めよ．

(3) △APQ の面積が最小になるときの k, l の値を求めよ．

$\boxed{3}$ [1997 一橋大]

平面上の 3 点 O, A, B は条件 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$ を満たす.

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ および △OAB の面積を求めよ.

(2) 点 P が平面上を $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ を満たしながら動くときの △PAB の面積の最大値を求めよ.

$\boxed{4}$ [2002 大阪大]

平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 K_1 を考える．K_1 の直径を 1 つとり，その両端を A，B とする．円 K_1 の周上の任意の点 Q に対し，線分 QA を 1 : 2 の比に内分する点を R とする．いま k を正の定数として，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+k\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ とおく．ただし，Q＝A のときは R＝A とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とおく．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{q}$ を用いて表せ.

(2) 点 Q が円 K_1 の周上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ となるような点 P が描く図形を K_2 とする．K_2 は円であることを示し，中心の位置ベクトルと半径を求めよ.

(3) 円 K_2 の内部に点 A が含まれるような k の値の範囲を求めよ.

$\boxed{5}$ [2007 大阪大]

xy 平面において，原点 O を通る半径 $r\,(r>0)$ の円を C とし，その中心を A とする。
O を除く C 上の点 P に対し，次の 2 つの条件 (a)，(b) で定まる点 Q を考える。

(a) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きが同じ。　　(b) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$

(1) 点 P が O を除く C 上を動くとき，点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動くことを示せ。

(2) (1) の直線を ℓ とする。ℓ が C と 2 点で交わるとき，r のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{6}$ [2006 京都大]

△ABC に対し，辺 AB 上に点 P を，辺 BC 上に点 Q を，辺 CA 上に点 R を，頂点とは異なるようにとる。この 3 点がそれぞれの辺上を動くとき，この 3 点を頂点とする三角形の重心はどのような範囲を動くか図示せよ。

$\boxed{7}$ [2009 早稲田大]おまけ

座標空間において，点 A$(1,\ 0,\ 2)$，B$(0,\ 1,\ 1)$ とする。点 P が x 軸上を動くとき，

AP＋PB の最小値は $\boxed{}$ である。

$\boxed{8}$ [2001 大阪市立大]

空間内に 4 点 A$(0,\ 0,\ 1)$，B$(2,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 2,\ -1)$，D$(0,\ 2,\ 1)$ がある．

(1)　点 C から直線 AB に垂線 CH を下ろしたとき，点 H の座標を求めよ．

(2)　点 P が xy 平面上を動き，点 Q が直線 AB 上を動くとき，距離 DP，PQ の和 DP＋PQ が最小となる P，Q の座標を求めよ．

$\boxed{9}$ [2012 東北大]

空間内に 4 点 A$(0,\ 0,\ 1)$，B$(3,\ 1,\ 1)$，C$(1,\ 4,\ 4)$，D$(1,\ 1,\ 2)$ がある。点 A を含み，直線 AD に垂直な平面を L とし，2 点 B，C の中点を M とする。

(1) 点 M から平面 L に下ろした垂線と L の交点を H とするとき，点 H の座標を求めよ。

(2) P を平面 L 上を動く点とするとき，線分 PB および線分 PC の長さの 2 乗の和 $\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2$ の最小値を求めよ。

$\boxed{10}$ [2009 岐阜大]

座標空間の 5 点 A$(1,\ 1,\ 2)$，B$(2,\ 1,\ 4)$，C$(3,\ 2,\ 2)$，D$(2,\ 7,\ 1)$，E$(3,\ 4,\ 3)$ を考える。

(1) 線分 AB と線分 AC のなす角を θ とするとき，$\sin\theta$ の値を求めよ。
ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(2) 点 D から三角形 ABC を含む平面へ下ろした垂線の足を H とする。H の座標を求めよ。

(3) 点 E を通り，三角形 ABC を含む平面に平行な平面を α とする。四面体 ABCD を平面 α で切ったときの切り口の面積を求めよ。

$\boxed{11}$ [2009 九州大]

O を原点とする xyz 空間内の点 A，B，C をそれぞれ A$(-1,\ 2,\ 3)$，B$(0,\ 1,\ 2)$，C$(0,\ 1,\ 0)$ とし，2 点 A，B を通る直線を ℓ とする。

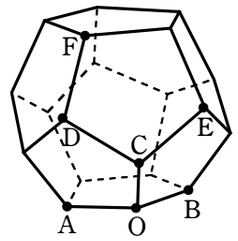
(1) 点 P は直線 ℓ 上を動き，点 Q は y 軸上を動くものとする。このとき，2 点 P と Q との距離の最小値を求めよ。また，P と Q との距離が最小となるときの P と Q をそれぞれ P_0，Q_0 とする。P_0 と Q_0 の座標を求めよ。

(2) P_0 との距離が s であるような直線 ℓ 上の点の 1 つを S とする。点 S から三角形 P_0Q_0C を含む平面に下ろした垂線とその平面との交点を R とするとき，線分 SR の長さを求めよ。

(3) y 軸上に長さ k の線分 DE があり，直線 ℓ 上に長さ m の線分 FG がある。四面体 DEFG の体積を求めよ。

$\boxed{12}$ [2011 福井大]

1 辺の長さが 1 の正十二面体を考える。点 O，A，B，C，D，E，F を図に示す正十二面体の頂点とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。なお，正十二面体では，すべての面は合同な正五角形であり，各頂点は 3 つの正五角形に共有されている。



(1) 1 辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さを求めて，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) O から平面 ABD に垂線 OH を下ろす。$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。さらにその大きさを求めよ。

$\boxed{13}$ [2015 京都大]

xyz 空間の中で，$(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球面 S を考える。点 Q が $(0,\ 0,\ 2)$ 以外の S 上の点を動くとき，点 Q と点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 2)$ の 2 点を通る直線 ℓ と平面 $z=0$ との交点を R とおく。R の動く範囲を求め，図示せよ。

$\boxed{14}$ [2008 金沢大]

xyz 空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$，および S 上の点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ を考える。S 上の A と異なる点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ に対して，2 点 A，P を通る直線と xy 平面の交点を Q とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ (t は実数) とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を t，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の成分表示を x_0，y_0，z_0 を用いて表せ。

(3) 球面 S と平面 $y=\dfrac{1}{2}$ の共通部分が表す図形を C とする。点 P が C 上を動くとき，xy 平面上における点 Q の軌跡を求めよ。

$\boxed{15}$ [2011 北海道大]

a を実数とする。xyz 空間内の 4 点を A$(0,\ a,\ 4)$，B$(-2,\ 0,\ 3)$，C$(1,\ 0,\ 2)$，D$(0,\ 2,\ 3)$ とし，点 P$(1,\ 0,\ 6)$ に光源をおく。

(1) 光源が xy 平面上につくる点 A の影の座標を求めよ。また，a が実数全体にわたって変化するとき，その影がつくる直線の方程式を求めよ。

(2) 光源が xy 平面上につくる三角形 BCD の影は三角形となる。この三角形の頂点の座標を求めよ。

(3) $a<5$ とする。光源が xy 平面上につくる四面体 ABCD の影を考える。この影が三角形となるような a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{16}$ [1996 山口大]

空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球を S とし，$x=-2$ で表される平面を α とする．点 P$(2, 0, 1)$ に光源を置く．

(1) 平面 α 上の点 $(-2, u, v)$ が球 S の影に入るための u，v に関する条件を求めよ．

(2) 平面 α 上の 2 点 A$(-2, k, 0)$，B$(-2, 0, k)$ を通る直線が，球 S の影に接するときの k の値を求めよ．