最難関大への数学Ⅲ　～発想力と計算力がモノをいう世界を旅してみよう。ちょっと難しいけどやっぱり数学はオモロイなあ～

セミナーのテキスト遅くなってすまん。３学期の学習内容を４問ずつ１セットにしました（体積だけ５問）。
1から順番に基礎と標準をやれるところまでやります。「基礎」は必ずできてほしい。今の時期、「標準」が解けたら十分かな。
「応用」はかなりマニアックです。ヤバいです。来年にじっくり取り組みましょう。

1～4　不等式の証明　　5～8　定積分関数　　9～１２　数列との融合問題　　１３～１６　面積　１７～２１　体積

1 [2015 京都工芸繊維大]基礎　まずは肩慣らしの１問

(1)　定積分 $\int_0^1 \log(1+x^2)\,dx$ の値を求めよ。

(2)　自然数 n に対して，n 個の数 n^2+k^2 $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ の積

$a_n=(n^2+1^2)(n^2+2^2)\cdots\cdots(n^2+n^2)$ を考える。極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a_n}}{n^2}$ を求めよ。

2 [2015 九州大]基礎　（１）（２）は朝の寝起き１秒後でもできる。（３）がメイン

(1)　関数 $y=\frac{1}{x(\log x)^2}$ は $x>1$ において単調に減少することを示せ。

(2)　不定積分 $\int\frac{1}{x(\log x)^2}dx$ を求めよ。

(3)　n を 3 以上の整数とするとき，不等式 $\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2}<\frac{1}{\log 2}$ が成り立つことを示せ。

3 [1996 大阪大]標準　これできな阪大受からんわ。

n を 2 以上の自然数とする．次の問いに答えよ．

(1)　不等式 $n\log n-n+1<\sum_{k=1}^{n}\log k<(n+1)\log n-n+1$ が成り立つことを示せ．

(2)　極限値 $\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n\log n}}$ を求めよ．

4 [2009 宮崎大]応用　ひっかかったらアカンで

n を自然数とするとき，極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}}+\cdots\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$ を求めよ。

5 [2009 首都大学東京]基礎　関数は数Ⅲやけど、考え方は文系レベル

実数 a に対して定積分 $f(a)=\int_0^1 e^x|x-a|dx$ を考えるとき，次の問いに答えよ。

(1)　定積分 $\int_0^1 e^x(x-a)dx$ を求めよ。

(2)　$f(a)$ を求めよ。

(3)　$f(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

6 [2010 横浜国立大]標準　フツー

(1)　$0<x<\pi$ のとき，$\sin x-x\cos x>0$ を示せ。

(2)　定積分 $I=\int_0^{\pi}|\sin x-ax|dx$ $(0<a<1)$ を最小にする a の値を求めよ。

7 [2011 東京工業大]応用　めんどくさい

実数 x に対して，$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t-x\sin 2t|dt$ とおく。

(1)　関数 $f(x)$ の最小値 を求めよ。

(2)　定積分 $\int_0^1 f(x)dx$ を求めよ。

8 [2001 東京工業大]応用　とってもめんどくさい

$a>0,\ t>0$ に対して，定積分

$$S(a,\ t)=\int_0^a\left|e^{-x}-\frac{1}{t}\right|dx$$

を考える．

(1)　a を固定したとき，t の関数 $S(a,\ t)$ の最小値 $m(a)$ を求めよ．

(2)　$\lim_{a\to 0}\frac{m(a)}{a^2}$ を求めよ．

最難関大への数学Ⅲ　～発想力と計算力がモノをいう世界を旅してみよう。ちょっと難しいけどやっぱり数学はオモロイなあ～

セミナーのテキスト遅くなってすまん。３学期の学習内容を４問ずつ１セットにしました（体積だけ５問）。
1から順番に基礎と標準をやれるところまでやります。「基礎」は必ずできてほしい。今の時期、「標準」が解けたら十分かな。
「応用」はかなりマニアックです。ヤバいです。来年にじっくり取り組みましょう。

1～4　不等式の証明　　5～8　定積分関数　　9～１２　数列との融合問題　　１３～１６　面積　１７～２１　体積

9 [2004 東京電機大]標準　※有名問題　オリスタにあるで

m，n を正の整数とする．このとき，定積分 $I(m,\ n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$ に関して

(1)　$I(m,\ 1)$ を求めよ．

(2)　$n\geqq 2$ のとき，$I(m,\ n)$ を $I(m+1,\ n-1)$ を用いて表せ．

(3)　$I(m,\ n)$ を m と n を用いて表せ．

10 [2008 山形大]標準　※有名問題

数列 $\{a_n\}$ が

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定義されるとき，次の問いに答えよ。

(1)　a_1，a_2 を求めよ。

(2)　部分積分法を用いて，$a_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}a_n$ を示せ。

(3)　$b_n=(n+1)a_{n+1}a_n$ とおくとき，$b_n=\dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(4)　$\sqrt{\dfrac{n\pi}{2(n+1)}}<\sqrt{n}\,a_n<\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ を示し，$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,a_n$ を求めよ。

11 [2009 北海道大]標準　※有名問題　まさかの円周率登場

自然数 n に対して $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{2n}dx$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　a_1 を求めよ。

(2)　a_{n+1} を a_n で表せ。

(3)　$\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(4)　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ を求めよ。

12 [2006 東京大]応用　見た目はシンプルなんだけどね。やっぱ東大はヤバイ

$a_1=\dfrac{1}{2}$ とし，数列 $\{a_n\}$ を漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(1+a_n)^2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定める。

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対し $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおく。

$n>1$ のとき，$b_n>2n$ となることを示せ。

(2)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$ を求めよ。

(3)　$\lim_{n\to\infty}na_n$ を求めよ。

13 [2010 京都大]基本　京大はたまに超基本問題を出題するね

a を正の実数とする。座標平面において曲線 $y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし，曲線 $y=\sin x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$，曲線 $y=a\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする。
このとき $S:T=3:1$ となるような a の値を求めよ。

14 [2020 大阪大]基本　阪大にしてはフツー

t を正の実数とする。xy 平面において，連立不等式

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$xy\leqq 1$，$x+y\leqq t$

の表す領域の面積を $S(t)$ とおく。極限 $\lim_{t\to\infty}(S(t)-2\log t)$ を求めよ。

15 [2006 大阪大]標準　簡単そうで意外にツムツム

$a>1$ とする。曲線 $y=\tan x$ $\left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $y=ax$ によって囲まれた部分の面積を S とする。極限 $\lim_{a\to\infty}\dfrac{S}{a}$ を求めよ。ただし，$\lim_{x\to+0}x\log x=0$ を証明なしに用いてもよい。

16 [2019 神戸大]標準　まずは図示

媒介変数表示 $x=\sin t$，$y=(1+\cos t)\sin t$ $(0\leqq t\leqq\pi)$ で表される曲線を C とする。

(1)　$\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ。

(2)　C の凹凸を調べ，C の概形をかけ。

(3)　C で囲まれる領域の面積 S を求めよ。

最難関大への数学Ⅲ　～発想力と計算力がモノをいう世界を旅してみよう。ちょっと難しいけどやっぱり数学はオモロイなあ～

セミナーのテキスト遅くなってすまん。３学期の学習内容を４問ずつ１セットにしました（体積だけ５問）。
1から順番に基礎と標準をやれるところまでやります。「基礎」は必ずできてほしい。今の時期、「標準」が解けたら十分かな。
「応用」はかなりマニアックです。ヤバいです。来年にじっくり取り組みましょう。

1～4　不等式の証明　　5～8　定積分関数　　9～１２　数列との融合問題　　１３～１６　面積　１７～２１　体積

17 [2014 名古屋大]基本

空間内にある半径 1 の球(内部を含む)を B とする。直線 ℓ と B が交わっており，その交わりは長さ $\sqrt{3}$ の線分である。

(1)　B の中心と ℓ との距離を求めよ。

(2)　ℓ の周りに B を 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

18 [2010 早稲田大]標準　※（１）だけやります。イメージできますか？

xyz 空間において，2 点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(-1,\ 1,\ 0)$ を考える。線分 PQ を x 軸の周りに 1 回転して得られる曲面を S とする。

(1)　曲面 S と，2 つの平面 $x=1$ および $x=-1$ で囲まれる立体の体積を求めよ。

(2)　(1) の立体の平面 $y=0$ による切り口を，平面 $y=0$ 上において図示せよ。

(3)　定積分 $\int_0^1 \sqrt{t^2+1}\,dt$ の値を $t=\dfrac{e^s-e^{-s}}{2}$ と置換することによって求めよ。これを用いて，(2) の切り口の面積を求めよ。

19 [2017 岡山大]応用　無理に立体をイメージしないことです。

座標空間内の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{D}(0,\ -1,\ \sqrt{2})$ を頂点とする四面体 ABCD を考える。

(1)　点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ t)$ を通り z 軸に垂直な平面と，辺 AC が点 Q において交わるとする。Q の座標を t で表せ。

(2)　四面体 ABCD (内部を含む) を z 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

20 [2013 大阪大]応用　変な体積と言えば阪大の得意技

xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸の周りに 1 回転させてできる円錐を V とする。円錐 V を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

21 [2020 京都大]応用　まさか京大が阪大の真似事をするとは！　上と同じ。

x，y，z を座標とする空間において，xz 平面内の曲線 $z=\sqrt{\log(1+x)}$　$(0\leqq x\leqq 1)$ を z 軸の周りに 1 回転させるとき，この曲線が通過した部分よりなる図形を S とする。この S をさらに x 軸の周りに 1 回転させるとき，S が通過した部分よりなる立体を V とする。このとき，V の体積を求めよ。