2018夏セミ　東大京大医学部への数学（文理共通）「確率」　東大　京大　一橋大を中心に　チョイムズ問題で頭を鍛えよう。
１～６　実質的に順列組み合わせの問題　７～９　確率の最大最小　１０～１７　様々な問題（確率漸化式を中心に）

1 [1996 東京大]まさか、東大でこれが出題されるとは!

n を正の整数とし，n 個のボールを 3 つの箱に分けて入れる問題を考える．ただし，1 個のボールも入らない箱があってもよいものとする．次に述べる 4 つの場合について，それぞれ相異なる入れ方の総数を求めたい．

(1)　1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか．

(2)　互いに区別のつかない n 個のボールを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか．

(3)　1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか．

(4)　n が 6 の倍数 $6m$ であるとき，n 個の互いに区別のつかないボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか．

2 [1997 神戸大]基本問題

$2n$ 個の白玉と n 個の赤玉をでたらめに並べる．

(1)　直線上に並べるときに赤玉どうしが隣り合わない確率を求めよ．

(2)　円周状に並べるときに赤玉どうしが隣り合わない確率を求めよ．

3 [2007 京都大]先ほどの東大に似ている。

得点 1，2，……，n が等しい確率で得られるゲームを独立に 3 回くり返す。このとき，2 回目の得点が 1 回目の得点以上であり，さらに 3 回目の得点が 2 回目の得点以上となる確率を求めよ。

4 [2008 一橋大]

赤い箱が 2 個と青い箱が 3 個ある。n 枚のカードを 1 枚ずつ無作為にこれら 5 個の箱のどれかに入れていく。カードが少なくとも 1 枚入っている赤い箱の個数を X とし，カードが少なくとも 1 枚入っている青い箱の個数を Y とする。

(1)　$X>0$ かつ $Y>0$ となる確率を求めよ。

(2)　$X>Y$ となる確率を求めよ。

5 [2006 京都大]

さいころを n 個同時に投げるとき，出た目の数の和が $n+3$ になる確率を求めよ。

6 [2012 京都大]

n を 3 以上の整数とする。1 から n までの番号をつけた n 枚の札の組が 2 つある。これら $2n$ 枚の札をよく混ぜ合わせて，札を 1 枚ずつ 3 回取り出し，取り出した順にその番号を X_1，X_2，X_3 とする。$X_1<X_2<X_3$ となる確率を求めよ。ただし一度取り出した札はもとに戻さないものとする。

7 [1997 一橋大]

白球 15 個と赤球 4 個が箱に入っている．この箱から球を 1 個取り出す操作を繰り返す．ただし，取り出した球はもとに戻さない．n 回目に取り出した球が 3 個目の赤球である確率を p_n とする．p_n が最大となる n の値を求めよ．

8 [2019 早稲田大]

赤玉 4 個，白玉 11 個が入っている袋がある。この袋から玉を 1 個取り出してもとに戻すことを n 回繰り返すとき，ちょうど 3 回赤玉を取り出す確率を p_n とする。このとき，

$n \geqq 4$ において，$\dfrac{p_n}{p_{n-1}}=\dfrac{{}^{ア}\boxed{}\,n}{{}^{イ}\boxed{}\,n-{}^{ウ}\boxed{}}$ であり，p_n を最大にする n の値は

${}^{エ}\boxed{}$ である。

9 [2019 同志社大]

A，B，C の 3 つの袋のどれにも 20 個の白玉と 10 個の黒玉が入っている。袋 A に対しては，玉を 1 個取り出して，取り出した玉が白であればその玉を袋 A に戻し，取り出した玉が黒であればその玉は戻さずに別に用意された新たな白玉を 1 個袋 A に入れるという試行を行う。この試行を繰り返すとき，袋 A の中の白玉が初めて 22 個になるのが 3 回目の試行終了時である確率は ${}^{ア}\boxed{}$ である。袋 B に対しては，玉を 2 個同時に取り出す。このとき，白玉と黒玉が 1 個ずつである確率は ${}^{イ}\boxed{}$，2 個とも黒玉である確率は ${}^{ウ}\boxed{}$ である。袋 C に対しては，10 個の玉を同時に取り出す。このとき，この 10 個の玉の中に黒玉が n 個入っている確率を P_n とすると，$0 \leqq k \leqq 9$ である整数 k に対して $\dfrac{P_{k+1}}{P_k}={}^{エ}\boxed{}$ であり，P_n が最大値をとるのは $n={}^{オ}\boxed{}$ のときである。

10 [2007 滋賀大]有名問題

n を 2 以上の自然数とする。n 個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　少なくとも 1 個は 1 の目が出る確率

(2)　出る目の最小値が 2 である確率

(3)　出る目の最小値が 2 かつ最大値が 5 である確率

11 [1996 関西大]引っ掛かりやすい問題です。

n を 3 以上の整数とする．袋の中に n 枚のカードがあり，1 枚は両面とも赤，1 枚は両面とも白，他の $(n-2)$ 枚は片面が赤で片面が白のカードである．この袋から 2 枚のカードを同時に抜き出し，無作為にテーブルに並べる．このとき，2 枚のカードの上の面がともに赤であるという事象を A, 下の面がともに白であるという事象を B, 下の面が赤白 1 枚ずつであるという事象を C とする．

(1)　事象 A の起こる確率 $P(\mathrm{A})$ を求めよ．

(2)　事象 A が起こったとき，事象 B の起こる確率 $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ を求めよ．

(3)　事象 A が起こったとき，事象 C の起こる確率を $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})$ とする．$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ と $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})$ の大小を比較せよ．

12 [2005 東北大]良問

n を 2 以上の整数とする。中の見えない袋に $2n$ 個の玉が入っていて，そのうち 3 個が赤で残りが白とする。A 君と B 君が交互に 1 個ずつ玉を取り出して，先に赤の玉を取り出した方が勝ちとする。取り出した玉は袋には戻さないとする。A 君が先に取り始めるとき，B 君が勝つ確率を求めよ。

13 [1999 一橋大]

2 つの箱 A，B のそれぞれに赤玉が 1 個，白玉が 3 個，合計 4 個ずつ入っている．1 回の試行で箱 A の玉 1 個と箱 B の玉 1 個を無作為に選び交換する．この試行を n 回繰り返した後，箱 A に赤玉が 1 個，白玉が 3 個入っている確率 p_n を求めよ．

14 [2020 横浜市立大]

2 つの袋 A，B それぞれに，赤玉 1 個，白玉 3 個の合計 4 個ずつの玉が入っている。袋 A と袋 B から同時に，無作為に 1 つずつの玉を取り出し，それらの玉を交換して袋に戻すことを繰り返す。n を自然数とするとき，n 回目の交換の後，袋 A の中に赤玉がちょうど 1 個入っている確率を n を用いて表せ。

15 [2016 一橋大]

硬貨が 2 枚ある。最初は 2 枚とも表の状態で置かれている。次の操作を n 回行った後，硬貨が 2 枚とも裏になっている確率を求めよ。

[操作]　2 枚とも表，または 2 枚とも裏のときには，2 枚の硬貨両方を投げる。
　　表と裏が 1 枚ずつのときには，表になっている硬貨だけを投げる。

16 [2017 京都大]

n を自然数とする。n 個の箱すべてに $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ計 5 枚入っている。おのおのの箱から 1 枚ずつカードを取り出し，取り出した順に左から並べて n 桁の数 X を作る。このとき，X が 3 で割り切れる確率を求めよ。

17 [1996 京都大]

n を 3 以上の整数とする．円周上の n 等分点のある点を出発点とし，n 等分点を一定の方向に次のように進む．各点でコインを投げ，表が出れば次の点に進み，裏が出れば次の点を跳び越してその次の点に進む．

(1)　最初に 1 周回ったとき，出発点を跳び越す確率 p_n を求めよ．

(2)　1 周目では出発点を跳び越し，2 周目に出発点を踏む確率 r_n を求めよ．

18 [2004 東京大]

片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある．この 3 枚の板を机の上に横に並べ，次の操作を繰り返し行う．

　さいころを振り，出た目が 1，2 であれば左端の板を裏返し，3，4 であればまん中の板を裏返し，5，6 であれば右端の板を裏返す．

たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば，色の並び方は「黒白白」となる．更に，2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば，色の並び方は「黒白黒」となる．

(1)　「白白白」から始めて，3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ．

(2)　「白白白」から始めて，n 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」または「白黒白」または「白白黒」となる確率を p_n とする．
　p_{2k+1} (k は自然数) を求めよ．

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする．