２０２０冬のセミナー　東大京大医学部への数学Ⅲ（高２全）　担当　赤阪正純

セミナーのテキスト遅くなってすまん。$\boxed{1}$から順番にやれるところまでやります。だんだん難しくなるように配列しました。目標は$\boxed{12}$まで！

「基礎」は４ＳＴＥＰのチョイムズ程度なので必ずできてほしい。今の時期、「標準」が解けたら十分かな。「応用」はかなりマニアックです。ヤバいです。来年にじっくり取り組みましょう。

$\boxed{1}$ [2010 神戸大]基礎　※Ｓクラスの授業でやりましたがもう一度

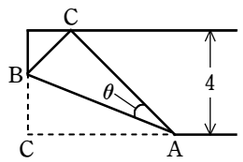
a を実数とする。関数 $f(x)=ax+\cos x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$ が極値をもたないように，a の値の範囲を定めよ。

$\boxed{2}$ [2008 大阪府立大]基礎

n を自然数とするとき，すべての正の数 x に対して $\log x+\dfrac{a}{x^n}>0$ が成り立つための実数 a の範囲を n を用いて表せ。

$\boxed{3}$ [1999 名古屋大]基礎

次の図のように幅 4 のテープを端点 C が対辺に重なるように折るとき，三角形 ABC の面積が最小になるような θ とそのときの面積を求めよ.



$\boxed{4}$ [2016 京都大]基礎

(1)　n を 2 以上の自然数とするとき，関数 $f_n(\theta)=(1+\cos\theta)\sin^{n-1}\theta$ の $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における最大値 M_n を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(M_n)^n$ を求めよ。

$\boxed{5}$ [2015 愛媛大]基礎

$x>0$ において定義された関数 $f(x)=e^x\log x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の値域を求めよ。

(2)　$f(x)$ の増減を調べよ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ はただ 1 つの変曲点をもつことを示せ。

(4)　点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ を曲線 $y=f(x)$ の変曲点とするとき，$\dfrac{1}{2}<\alpha<\dfrac{2}{e}$ であることを示せ。

$\boxed{6}$ [2000 福島県立医科大]標準

関数 $f(x)=\dfrac{a-\cos x}{a+\sin x}$ が，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で極大値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ．また，その極大値が 2 となるときの a の値を求めよ.

$\boxed{7}$ [2005 東北大]標準

a を $0<a<1$ を満たす定数とし，$f(x)=\dfrac{\cos 2x-2}{a\cos x+1}$ とする。

(1)　$f(x)$ が $0\leqq x\leqq\pi$ で減少関数となる a の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ の $0\leqq x\leqq\pi$ における最大値は $f(0)$ であることを示せ。

$\boxed{8}$ [2016 横浜国立大]標準

a を正の定数とする。2 つの曲線 $C_1:\ y=x\log x$ と $C_2:\ y=ax^2$ の両方に接する直線の本数を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^2}{x}=0$ は証明なしに用いてよい。

$\boxed{9}$ [2020 大阪大]標準

n を 2 以上の自然数とする。△ABC において，辺 AB の長さを c，辺 CA の長さを b で表す。$\angle\mathrm{ACB}=n\angle\mathrm{ABC}$ であるとき，$c<nb$ を示せ。

$\boxed{10}$ [2003 大阪大]標準

(1)　$0<t<1$ のとき，不等式 $\dfrac{\log t}{2}<-\dfrac{1-t}{1+t}$ が成り立つことを示せ.

(2)　k を正の定数とする．$a>0$ とし，曲線 $C:\ y=e^{kx}$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ e^{ka})$，$\mathrm{Q}(-a,\ e^{-ka})$ を考える．このとき，P における C の接線と Q における C の接線の交点の x 座標は常に正であることを示せ.

$\boxed{11}$ [2017 中央大]標準

(1)　$x>-1$ において，不等式 $\log(1+x)\leqq x$ が成り立つことを示せ。

(2)　$x\geqq 0$ のとき，不等式 $x-\dfrac{x^2}{2}\leqq\log(1+x)$ が成り立つことを示せ。

(3)　自然数 n に対し

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

と定める。このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

$\boxed{12}$ [2017 神戸大]標準

n を自然数とする。

$$f(x)=\sin x-nx^2+\frac{1}{9}x^3$$

とおく。$3<\pi<4$ であることを用いて，次の問いに答えよ。

(1)　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x)<0$ であることを示せ。

(2)　方程式 $f(x)=0$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に解をただ 1 つもつことを示せ。

(3)　(2) における解を x_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ であることを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nx_n$ を求めよ。

２０２０冬のセミナー　東大京大医学部への数学Ⅲ（高２全）　担当　赤阪正純

セミナーのテキスト遅くなってすまん。$\boxed{1}$から順番にやれるところまでやります。だんだん難しくなるように配列しました。目標は$\boxed{12}$まで！

「基礎」は４ＳＴＥＰのチョイムズ程度なので必ずできてほしい。今の時期、「標準」が解けたら十分かな。「応用」はかなりマニアックです。ヤバいです。来年にじっくり取り組みましょう。

$\boxed{13}$ [2018 大阪大]応用

(1)　$x>0$ の範囲で不等式

$$x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

が成り立つことを示せ。

(2)　x が $x>0$ の範囲を動くとき，

$$y=\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}$$

のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{14}$ [2009 東京大]応用

(1)　実数 x が $-1<x<1$，$x\neq 0$ を満たすとき，次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2)　次の不等式を示せ。

$$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$$

$\boxed{15}$ [2006 東北大]応用

$x>0$ において，関数 $f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}$ を考える。

(1)　$f'(2)$ を求め，$x>2$ のとき $f'(x)<1$ であることを示せ。

(2)　k が自然数のとき，$f'\left(\dfrac{1}{k}\right)$ を求めよ。

(3)　$f'(x)=1$ となる x を値の大きいものから順に x_1，x_2，x_3，…… とおく。

$n\geqq 2$ である自然数 n に対して，$\dfrac{1}{n}<x_n<\dfrac{1}{n-1}$ を示せ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(x_n)$ を求めよ。

$\boxed{16}$ [2013 東京大]応用

a を実数とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\frac{\cos x}{x},\quad g(x)=\sin x+ax$$

このとき $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど 3 つもつような a をすべて求めよ。

$\boxed{17}$ [2013 東京工業大]応用

k を定数とするとき，方程式 $e^x-x^e=k$ の異なる正の解の個数を求めよ。