2020冬期セミナー　高２男子英数Ｓ　文理共通数学②　担当　赤阪正純　　(　　)組(　　)番　名前(　　)

1～4　関数の極値　5～8　最大最小　9～１２　接線　１３～１８　面積　１９～２２　定積分関数　２３～２６　応用問題

基礎問題に一瞬だけ触れた後、標準問題（全１１問）をやります。基礎問題は各自で解いておくこと。

---

1 [2015 奈良県立医科大]基礎

$f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x-3\sin x\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。
それぞれを与える x は求めなくてよい。

2 [2008 京都大]標準

$0\leqq x<2\pi$ のとき，方程式 $2\sqrt{2}(\sin^3 x+\cos^3 x)+3\sin x\cos x=0$ を満たす x の個数を求めよ。

3 [2008 昭和薬科大]基礎

関数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2+4(a^2-9)x+1$ において

(1)　$f(x)$ が極大値，極小値をもつための a の値の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ が $x>0$ で極大値，極小値をもつための a の値の範囲を求めよ。

4 [2018スタンダードⅠⅡＡＢ受 東京理科大]標準

a，b を実数とする。x の 4 次関数 $f(x)=x^4-ax^2+bx$ が極大値をもつための必要十分条件を，a と b に関する不等式で表せ。

5 [2017 神戸大]標準

t を正の実数とする。$f(x)=x^3+3x^2-3(t^2-1)x+2t^3-3t^2+1$ とおく。

(1)　$2t^3-3t^2+1$ を因数分解せよ。

(2)　$f(x)$ が極小値 0 をもつことを示せ。

(3)　$-1\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値 m と最大値 M を t の式で表せ。

6 [2006 大阪大]標準

a を実数とし，関数 $f(x)=x^3-3ax+a$ を考える。$0\leqq x\leqq 1$ において $f(x)\geqq 0$ となるような a の範囲を求めよ。

7 [2016 一橋大]標準

a を実数とし，$f(x)=x^3-3ax$ とする。区間 $-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。M の最小値とそのときの a の値を求めよ。

8 [2012 京都大]標準

実数 x，y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき
$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$ がとりうる値の範囲を求めよ。

9 [2005 大阪府立大]基礎

曲線 C：$y=x^3+ax^2-2a^2x$ と直線 $x=1$ との交点を P とする。P と異なる C 上の点 Q における C の接線が点 P を通るとする。

(1)　Q の座標を a を用いて表せ。

(2)　a を $a\geqq -1$ の範囲で動かすとき，Q の y 座標が最小となる a の値とそのときの Q の y 座標を求めよ。

10 [2014 京都大]基礎

t を実数とする。$y=x^3-x$ のグラフ C へ点 P$(1,\ t)$ から接線を引く。

(1)　接線がちょうど 1 本だけ引けるような t の範囲を求めよ。

(2)　t が (1) で求めた範囲を動くとき，P$(1,\ t)$ から C へ引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

11 [2005 京都大]標準

曲線 $y=x^3$ の $x>0$ の部分を C とする。C 上の点 P に対し，P における C の接線と x 軸との交点を Q とし，P における C の法線と y 軸との交点を R とする。P が C 上を動くとき，$\dfrac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OQ}}$ の最小値を求めよ。ただし，O は原点である。

12 [2009 大阪大]標準

曲線 C：$y=x^3-kx$ (k は実数) を考える。C 上に点 A$(a,\ a^3-ka)$ $(a\neq 0)$ をとる。
次の問いに答えよ。

(1)　点 A における C の接線を ℓ_1 とする。ℓ_1 と C の A 以外の交点を B とする。
B の x 座標を求めよ。

(2)　点 B における C の接線を ℓ_2 とする。ℓ_1 と ℓ_2 が直交するとき，a と k が満たす条件を求めよ。

(3)　ℓ_1 と ℓ_2 が直交する a が存在するような k の値の範囲を求めよ。

2020冬期セミナー　高２男子英数Ｓ　文理共通数学②　担当　赤阪正純　　(　　)組(　　)番　名前(　　)

1～4　関数の極値　5～8　最大最小　9～１２　接線　１３～１８　面積　１９～２２　定積分関数　２３～２６　応用問題

基礎問題に一瞬だけ触れた後、標準問題（全１１問）をやります。基礎問題は各自で解いておくこと。

13 [2015 大分大]基礎

k を実数とする。関数 $y=|x(x-1)|$ のグラフと直線 $y=kx$ が異なる 3 点を共有している。これらで囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする。

(1)　k の値の範囲を求めよ。

(2)　S を k の式で表せ。

(3)　S が最小になるときの k の値を求めよ。

14 [2014 一橋大]基礎

$0<t<1$ とし，放物線 C : $y=x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線を ℓ とする。

C と ℓ と x 軸で囲まれる部分の面積を S_1 とし，C と ℓ と直線 $x=1$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1+S_2 の最小値を求めよ。

15 [2015 大阪大]基礎

直線 ℓ : $y=kx+m$ $(k>0)$ が円 C_1 : $x^2+(y-1)^2=1$ と放物線 C_2 : $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ の両方に接している。

(1)　k と m を求めよ。

(2)　直線 ℓ と放物線 C_2 および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。

16 [1999 京都大]標準

座標平面上で原点を通る直線と $y=x|x+2|$ のグラフが相異なる 3 点で交わっている．このグラフとこの直線によって囲まれる図形で，この直線より下側にあるものの面積を S_1，上側にあるものの面積を S_2 とする．$S_1:S_2=9:8$ となるとき，この直線の傾きを求めよ．

17 [2018 一橋大]標準

a を実数とし，$f(x)=x-x^3$，$g(x)=a(x-x^2)$ とする。2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ は $0<x<1$ の範囲に共有点をもつ。

(1)　a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるような a の値を求めよ。

18 [2010 大阪府立大]標準

k を正の実数とし，xy 平面上の 2 曲線 C_1 : $y=-x^3+kx$，C_2 : $x^2+y^2=k$ を考える。

(1)　C_1 と C_2 の共有点の個数を求めよ。

(2)　C_1 と C_2 が 4 つの共有点をもつとする。$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の範囲において，C_1 と C_2 で囲まれた 2 つの部分の面積をそれぞれ求めよ。

19 [2008 東京電機大]基礎

$f(x)=x^2+\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt$ となる関数 $f(x)$ を求めよ。

20 [2011 名城大]基礎

実数 x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_1^2 |x-t|\,dt$$

とするとき，$y=f(x)$ のグラフをかき，$f(x)$ の最小値を求めよ。

21 [2007 東北大]標準

関数 $f(x)$ が $f(x)=x^2-x\displaystyle\int_0^2 |f(t)|\,dt$ を満たしているとする。このとき，$f(x)$ を求めよ。

22 [2013 同志社大]標準

$x\geqq 0$ に対して $f(x)=\displaystyle\int_0^1 |t-x|(t+x)\,dt$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$f(1)$ の値を求めよ。

(2)　$x>1$ のとき $f(x)$ を計算し，$x>1$ において関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(3)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき $f(x)$ を計算し，$0\leqq x\leqq 1$ において関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(4)　$x\geqq 0$ における関数 $y=f(x)$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

23 [1999 京都大]応用

3 次関数 $y=x^3+kx$ のグラフを考える．連立不等式 $y>-x$，$y<-1$ が表す領域を A とする．A のどの点からも上の 3 次関数のグラフに接線が 3 本引けるための，k についての必要十分条件を求めよ．

24 [1997 東京大]応用

a を実数とする．

(1)　曲線 $y=\dfrac{8}{27}x^3$ と放物線 $y=(x+a)^2$ の両方に接する直線が x 軸以外に 2 本あるような a の値の範囲を求めよ．

(2)　a が (1) の範囲にあるとき，この 2 本の接線と放物線 $y=(x+a)^2$ で囲まれた部分の面積 S を a を用いて表せ．

25 [2018 東京大]応用

$a>0$ とし，$f(x)=x^3-3a^2x$ とおく。

(1)　$x\geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための，a についての条件を求めよ。

(2)　次の 2 条件を満たす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件 1 : 方程式 $f(x)=b$ は相異なる 3 実数解をもつ。

条件 2 : 更に，方程式 $f(x)=b$ の解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると $\beta>1$ である。

26 [2005 一橋大]応用

a を定数とし，x の 2 次関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=x^2-3$$

$$g(x)=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}$$

(1)　2 つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(2)　(1) で求めた範囲に属する a に対して，2 つの放物線によって囲まれる図形を C_a とする。C_a の面積を a で表せ。

(3)　a が (1) で求めた範囲を動くとき，少なくとも 1 つの C_a に属する点全体からなる図形の面積を求めよ。