1 ＜準備編＞　玉を箱に配る問題（Part 0）

玉を箱に配る問題を解いたことがあるでしょう．この問題では，「玉を区別するか，しないか」，「箱を区別するか，しないか」，「空箱を認めるか，認めないか」，で合計 8 パターンが考えられます．
せっかくの機会なので，この全 8 パターンを完全分類してみましょう．

n 個の玉を 3 つの箱に分ける分け方の総数を，以下の場合に求めてみてください．
（1）区別のある n 個の玉を，区別のある箱 A，B，C に分ける．ただし，空箱 OK.
（2）区別のある n 個の玉を，区別のある箱 A，B，C に分ける．ただし，空箱 NG.
（3）区別のある n 個の玉を，区別のつかない 3 つの箱に分ける．ただし，空箱 OK.
（4）区別のある n 個の玉を，区別のつかない 3 つの箱に分ける．ただし，空箱 NG.
（5）区別のつかない n 個の玉を，区別のある箱 A，B，C に分ける．ただし，空箱 OK.
（6）区別のつかない n 個の玉を，区別のある箱 A，B，C に分ける．ただし，空箱 NG.
（7）区別のつかない n 個の玉を，区別のつかない 3 つの箱に分ける．ただし，空箱 OK.
（8）区別のつかない n 個の玉を，区別のつかない 3 つの箱に分ける．ただし，空箱 NG.
注　**（7）と（8）のみ，$n = 6m$ として考えてください．**でないと，解けません．

注　一般的に n 個で計算する方が簡単なんですが，イマイチ難しく思ってしまう人は，$n = 6$ として考えても良いでしょう．

見やすいように，下のように表にしてみましたが，場合によっては，一瞬で終わる（つまり，枠が広すぎる）or メチャクチャ大変（つまり，枠が狭すぎる）と思うので，各自で調整してください．

☆n 個の玉を区別する場合

	区別のある 3 つの箱 A，B，C	区別のつかない 3 つの箱
空箱 OK		
空箱 NG		

☆n 個の玉を区別しない場合

	区別のある 3 つの箱 A，B，C	区別のつかない 3 つの箱
空箱 OK		
空箱 NG		

参考　実は，この問題が，東京大学（1996 年後期理系）でそのまま出題されています．
天下の東大といえども，やはり基礎基本が重要視されるということでしょう．

n を正の整数とし，n 個のボールを 3 つの箱に分けて入れる問題を考える．ただし，1 個のボールも入らない箱があっても良いものとする．次に述べる 4 つの場合について，それぞれ相異なる入れ方の総数を求めたい．
（1）1 から n まで異なる番号のついて n 個のボールを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか．
（2）互いに区別のつかない n 個のボールを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか．
（3）1 から n まで異なる番号のついて n 個のボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか．
（4）n が 6 の倍数 $6m$ であるとき，n 個の互いに区別のつかないボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか．

（1996 年東大理系後期）

解　解答は先ほどと全く同じなので省略．

2 ＜準備編＞　くじ引き (Part 0)

くじ引き問題も頻出ですが，解き方にバラツキがあるようです．きちんとまとめておきましょう．なお，1 度引いたくじを「元に戻すか」「元に戻さないか」で天と地ほどの違いがあります．今回は「元に戻さない」場合です．後ほど説明しますが，「元に戻す」場合はサイコロを振ることと全く同じです．

箱の中に当たりくじが 5 本，ハズレくじが 15 本，計 20 本のくじが入っています．この箱の中から 1 回につき 1 本ずつ，くじを引きます．ただし，1 度取り出したくじはもとに戻さないとします．
くじを 3 回引いたとき，1 回だけ当たる確率を求めるのに，次の解法で答えを出しました．すべて正解なのですが，どういう考え方に基づいて答えを出したのか説明できますか？

(解 1) $\dfrac{5}{20}\times\dfrac{15}{19}\times\dfrac{14}{18}+\dfrac{15}{20}\times\dfrac{5}{19}\times\dfrac{14}{18}+\dfrac{15}{20}\times\dfrac{14}{19}\times\dfrac{5}{18}=\dfrac{35}{76}$

(解 2) $\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_{15}\mathrm{C}_2\times 3!\times 17!}{20!}=\dfrac{35}{76}$

(解 3) $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_{17}\mathrm{C}_4}{{}_{20}\mathrm{C}_5}=\dfrac{35}{76}$

(解 4) $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_{15}\mathrm{C}_2\times 3!}{{}_{20}\mathrm{P}_3}=\dfrac{35}{76}$

(解 5) $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_{15}\mathrm{C}_3}{{}_{20}\mathrm{C}_3}=\dfrac{35}{76}$

3 ＜準備編＞　じゃんけん (Part 0)

n 人で 1 回じゃんけんをするとき，次の確率を求めよ．
(1) 1 人だけが勝つ確率 p_1
(2) 2 人だけが勝つ確率 p_2
(3) 3 人だけが勝つ確率 p_3
(4) 4 人だけが勝つ確率 p_4
(5) あいこになる確率 p_0

4 サイコロ (Part 1)

次の問題は，1992 年に初めて京大で出題されて以来，数々の大学で出題されてきた超有名問題です．君たちも，どこかしらで解いたことがあるのではないでしょうか．

n 個のサイコロを投げる．このとき，次の確率を計算せよ．
(1) 出る目の積が 3 の倍数になる確率
(2) 出る目の積が 6 の倍数になる確率
(3) 出る目の積が 4 の倍数になる確率

5 サイコロ (Part 2)

次の問題も超有名問題です．

n 個のサイコロを投げる．このとき，次の確率を計算せよ．
(1) 出る目の最大値が 5 である確率
(2) 出る目の最小値が 2 である確率
(3) 出る目の最大値が 5 かつ最小値が 2 である確率

(2007 年滋賀大)

6 サイコロ (Part 3)

サイコロを n 回振るとき，出る目が 3 種類である確率を求めよ．

7 サイコロ (Part 4)

「サイコロちゃうやん」と思うかもしれませんが，サイコロ型です．先ほどの 6 に似ているのですが，気づくでしょうか．

赤玉，白玉，青玉，黄玉が 1 個ずつ入った袋がある．よくかきまぜた後に袋から玉を 1 個取り出し，その玉の色を記録してから袋に戻す．この試行を繰り返すとき，n 回目の試行で初めて赤玉が取り出されて 4 種類全ての色が記録済みとなる確率を求めよ．ただし，n は 4 以上の整数とする．

(2021 年京都大)

8 サイコロ (Part 5)

「サイコロちゃうやん」と思うかもしれませんが，「元に戻すくじ引き」はサイコロです．いわゆる反復試行と呼ばれるものです．

白球 11 個と赤球 4 個が箱の中に入っている．この箱から球を 1 個取り出してもとに戻すことを n 回繰り返すとき，ちょうど 3 回赤球を取り出す確率 p_n を求めよ．

(2019 早稲田大)

⇨注　オリジナルは「確率 p_n が最大となる n を求めよ」でした．これも重要な問題なのですが，今回は触れません．そのうち学習すると思います．

9 サイコロ (Part 6)

サイコロやコインを投げ，その結果応じて，点が移動する問題も頻出です．これも反復試行です．次の問題は，大げさに書いてありますが，うまく処理すれば，どうってことない問題です．

数直線の原点上にある点が，以下の規則で移動する試行を考える．

（規則）　さいころを振って出た目が奇数の場合は，正の方向に 1 移動し，
出た目が偶数の場合は，負の方向に 1 移動する．

k 回の試行の後の，点の座標を $X(k)$ とする．

(1) $X(10)=0$ である確率を求めよ．

(2) $X(1)\neq 0$，$X(2)\neq 0$，……，$X(5)\neq 0$ であって，かつ，$X(6)=0$ となる確率を求めよ．

(3) $X(1)\neq 0$，$X(2)\neq 0$，……，$X(9)\neq 0$ であって，かつ，$X(10)=0$ となる確率を求めよ．

(2010 千葉大前期文理共通)

10 くじ引き (Part 1)

袋の中に青玉 7 個，赤玉 3 個が入っている．袋の中から 1 回につき 1 個ずつ玉を取り出す．1 度取り出した玉は袋には戻さないとして，以下の問いに答えよ．

(1) 4 回目に初めて赤玉が取り出される確率を求めよ．

(2) 8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出されている確率を求めよ．

(3) 赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出される確率を求めよ．

(2009 東北大)

11 くじ引き (Part 2)

白球 15 個と赤球 4 個が箱の中に入っている．この箱から球を 1 個取り出す操作を繰り返す．ただし，取り出した玉はもとに戻さない．n 回目に取り出した球が 3 個目の赤球である確率 p_n を求めよ．

(1997 一橋大)

注　オリジナルは「確率 p_n が最大となる n を求めよ」でした．これも重要な問題なのですが，今回は触れません．そのうち学習すると思います．

12 玉を配る問題(Part 2)

赤，白，青の玉が 3 個づつ合計 9 個ある．これらを 3 人に 3 個づつ配るとき，赤玉を持つ人が 2 人となる確率を求めよ．

13 玉を配る問題(Part 3)

赤，白，青，黄の球が 2 個ずつ合計 8 個ある．これらを 4 人に 2 個ずつ配るとき，どの人についても，受け取る玉の色が異なる確率を求めよ．

(2007 駿台京大実戦模試文理共通問題)

14 ためになる問題(Part 1)

数学が得意な人は，難しそうな問題を簡単な問題に置き換えて考えることができる人です．この問題も，うまく解釈できればとても簡単に答えが出せます．考えてみましょう．

得点 1，2，……，n が等しい確率で出るゲームを独立に 3 回くり返す．このとき，2 回目の得点が 1 回目の得点以上であり，さらに 3 回目の得点が 2 回目の得点以上となる確率を求めよ．

(2007 年京大理系)

15 ためになる問題(Part 2)

次の問題も先ほどの $\boxed{2}$ と同じく，うまく解釈することがポイントです．

サイコロを n 個同時に投げるとき，出た目の和が $n+3$ になる確率を求めよ．

(2006 年京大理系)

16 ためになる問題 (Part 3)

n を 3 以上の整数とする．1 から n までの番号をつけた n 枚の札の組が 2 つある．これら $2n$ 枚の札をよく混ぜ合わせて，札を 1 枚ずつ 3 回取り出し，取り出したカードの順にその番号を X_1，X_2，X_3 とする．$X_1 < X_2 < X_3$ となる確率を求めよ．ただし一度取り出した札はもとに戻さないものとする．

(2012 年京大文系)

17 ためになる問題 (Part 4)

n を 2 以上の整数とする．中の見えない袋に $2n$ 個の玉が入っていて，そのうち 3 個が赤で残りが白とする．赤阪くんと笠原さんが交互に 1 個ずつ玉を取り出して，先に赤の玉を取り出した方が勝ちとする．取り出した玉は袋には戻さないとする．赤阪くんが先に取り始めるとき，笠原さんが勝つ確率を求めよ．

(2005 年東北大)

18 条件付き確率(Part 1)

条件付き確率は共通テストで出題されることが多いです．しかも，ご存知の通り，共通テストは長文問題が多い！
そこで，次の赤阪君と朝子ちゃんの会話を読んで，条件付き確率について考えてみよう．条件付き確率は，慎重に考えないとうっかり間違ってしまうことが多いです．

9 月 18 日は数学大好き赤阪君の誕生日．赤阪君は大好きな朝子ちゃんからのプレゼントを楽しみにしています．朝子ちゃんは赤阪君がチョコレートが大好きなのを知っていたので，チョコレートをプレゼントすることにしました．

朝子ちゃんは，愛情たっぷりのチョコレートを 6 個作り，金と銀の紙で 3 つずつ包んで，2 個ずつ 3 つの箱につめました．1 つ目の箱には金のチョコレートが 2 つ，2 つ目の箱には金と銀のチョコレートが 1 つずつ，3 つ目の箱には銀のチョコレートが 2 つ入っています．

1 つ目の箱	2 つ目の箱	3 つ目の箱
G　G	G　S	S　S

G … 金のチョコレート　　S … 銀のチョコレート

誕生日当日，朝子ちゃんは赤阪君に「3 つの箱のうち 1 つだけを選んでネ」と言いました．赤阪君は迷いながらも 1 つの箱を選びました．そして，その箱から 1 つのチョコレートを取り出してみると，金のチョコレートが出てきました．

赤阪君は金のチョコレートが大好きだったので大喜びしました．そのときふと，残りの 1 つも金のチョコレートである確率はどうなるのだろう，と考えました．

「1 つのチョコレートが金だったのだから，箱は 1 つ目か 2 つ目のはずだ．そして残りの 1 つも金のチョコレートが入っているのは 1 つ目の箱のときだから

$$\text{求める確率は}\frac{1}{2}$$

に間違いない！」

その話を聞いて，朝子ちゃんはなぜかスッキリしませんでした．

「だって，1 つ目の箱と 2 つ目の箱では金のチョコレートの数が違うんだから，2 つの箱のうちどちらか 1 つなんておかしくない？」

さあ，あなたならこの確率はそうなると思いますか．赤阪君の主張が正しいと思うなら朝子ちゃんにわかりやすく説明してあげましょう．朝子ちゃんと同じくスッキリしないなら，赤阪君に正しい確率を教えてあげましょう．

19 条件付き確率(Part 2)

袋の中に，両面とも赤のカードが 2 枚，両面とも青，両面とも黄，片面が赤で片面が青，片面が青で片面が黄のカードがそれぞれ 1 枚ずつ，計 6 枚のカードが入っている．その中の 1 枚無作為に選んで取り出して机の上に置き，そのカードを袋に戻さずに，もう 1 枚カードを無作為に取り出して机の上に置く．

(1) 最初のカードの表が赤であったとき，そのカードの裏も赤である確率を求めよ．

(2) 最初のカードの表が赤で，かつ 2 枚目のカードの表が青であったとき，最初のカードの裏が赤である確率を求めよ．

(2014 慶應義塾大)