1　第 1 日目

$\boxed{1}$　a，b，c は有理数とする．$a+b+c$，$2(ab+bc+ca)$，$4abc$ がすべて整数であれば，a，b，c はすべて整数であることを示せ．

$\boxed{2}$　箱の中に，1，2，4，8 の数がそれぞれに書かれた 4 枚のカード $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{4}$，$\boxed{8}$ があり，次の（試行）を繰り返し 4 回行う．

（試行）　箱の中から 1 枚のカードを取り出し，代わりに 0 が書かれたカード $\boxed{0}$ を 1 枚，箱の中に入れる．

4 回の試行で取り出した 4 枚のカードに書かれた数の和が 10 以上である確率を求めよ．

$\boxed{3}$　斜辺の長さが 1 である直角三角形 ABC の内心を I とする．$\left|\overrightarrow{\mathrm{AI}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{BI}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{CI}}\right|^2$ の最小値を求めよ．

$\boxed{4}$　O を原点とする座標空間に，2 点 $\mathrm{P}(t,\ 0,\ \sin t)$，$\mathrm{Q}(0,\ 2t,\ \sin 2t)$ がある．t が $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たして変化するとき，線分 PQ(ただし，$t=0$ のときは 1 点 O) が通過してできる曲面を D とする．D を z 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

2　第 2 日目

$\boxed{5}$　n を正の整数とするとき，$2^{n+1}+3^n$ と 2^n+3^{n+1} は互いに素であることを示せ．

$\boxed{6}$　一辺の長さが 1 の立方体 ABCD-EFGH がある．ただし，四角形 ABCD と四角形 EFGH は向かい合った 1 組の面であり，AE，BF，CG，DH はこの立方体の辺である．この立方体から 3 つの四面体 BEFG，BCDG，DEHG を取り除いてできる立体を K とする．辺 AE 上の点を通り，辺 AE に垂直な平面で K を切断したときの断面積の最大値を求めよ．

$\boxed{7}$　正の整数からなる数列 $\{a_n\}$ で次の条件（ア），（イ）をともに満たすものの一般項を求めよ．

（ア）$a_1+a_2+\cdots+a_n \leqq n^2+1$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）

（イ）$a_{n+1} \geqq a_n+2$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）

$\boxed{8}$　a を実数の定数とする．xy 平面上に，

$$\text{曲線 } C : y=-\log(\cos x)\ \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

と点 A$(0,\ a)$ がある．点 P が C 上の動くとき A と P の距離が最小になるのが，P が原点にあるときであるような a の値の範囲を求めよ．

3　第 3 日目

9　長さが 2 である線分 AB を直径とする半円周上に点 P をとり，∠ABP の二等分線と線分 AP の交点を Q とする．P がこの半円周上（A，B をのぞく）を動くとき，Q の軌跡を C とする．C と線分 AB で囲まれる部分の面積を求めよ．

10　n を 2 以上の整数とする．

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 \cdots + x^{n-1})^2$$

とし，$f(x)$ を 2 次式 $x(x-2)$ で割ったときの余りを $ax + b$（a，b は定数）とする．

(1) a，b を求めよ．

(2) $a > 5 \times 10^{39}$ となる最小の n を求めよ．ただし，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてもよい．

11　実数からなる数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$(n+1)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \geqq n \sum_{k=1}^{n} k(k+1){a_k}^2 \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たす．このとき，一般項 a_n を求めよ．

12　n を正の整数とする．A，B の 2 チームを含む 2^n 個のチームが参加して，次のように試合を行う．抽選で 2 チームずつに分かれて対戦し，勝ち残ったチームについて同様のことを繰り返し，1 チームだけが勝ち残るまで続ける．

各対戦においてどちらのチームが勝つ確率も $\dfrac{1}{2}$ であるとするとき，A と B が何回目かに対戦し，かつ A が最後まで勝ち残る確率を求めよ．

4　第 4 日目

13　p，q を素数，n を正の整数とする．異なる正の整数 x，y があり

$$x+y=p^n,\ xy=q^n$$

を満たすとき，p，q，n を求めよ．

14　最初，箱 A，箱 B のいずれにも，赤球が 1 個，白球が 2 個の計 3 個の球が入っている．箱 A から 1 個の球を，箱 B から 1 個の球を同時に取り出し，それぞれをもう一方の箱に入れるという試行を n 回繰り返す．

その後，A，B のうち 1 つの箱を無作為に選んで，球を 2 個取り出したとき，それが 2 個とも赤球である確率を求めよ．ただし，n は正の整数とする．

15　xy 平面に，点 $(1,\ 0)$ を通り傾きが $\tan\alpha$ の直線 l，点 $(0,\ 1)$ を通り傾きが $\tan\beta$ の直線 m がある．l と m が 1 点で交わり，α，β が

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2},\ \alpha>0,\ \beta>0$$

を満たして変化するとき，l と m の交点の軌跡を求め，図示せよ．

16　平面上に異なる 3 点 OAB があり，O を中心として A を角 θ だけ回転した点を C とし，B を中心として A を角 θ だけ回転した点を D とする．ただし，$0<\theta<\pi$ とする．このとき，次の (a)(b) が同値であることを示せ．

(a) O，C，D が一直線上にある

(b) 直線 OB と直線 AC は平行である

5　第 5 日目

$\boxed{17}$　a は実数の定数とする．任意の整数 n に対して x の方程式

$$nx^2+(n+3)x+a=0$$

が整数の解をもつような a の値をすべて求めよ．

$\boxed{18}$　平面上に $\mathrm{OA}=4$，$\mathrm{OB}=3$，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形 OAB がある．点 C を，直線 AB に箝して O と反対側に，三角形 ABC が $\angle\mathrm{BCA}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形になるようにとる．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

$\boxed{19}$　n は自然数とする．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ の 3 枚のカードから 1 枚を選んで元に戻すという操作を $2n+1$ 回繰り返す．k 回目に取り出したカードの数を a_k（$k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n+1$）とするとき，

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq a_{n+1} \text{ かつ } a_{n+1} \geqq a_{n+2} \geqq \cdots \geqq a_{2n} \leqq a_{2n+1}$$

となる確率を求めよ．

$\boxed{20}$　p は正の定数とする．xy 平面上の 2 曲線

$$C_1\colon |y|=\tan x\ \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right),\qquad C_2\colon y=\frac{x^2}{4}+p$$

が 2 点で接しているとする．C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．ただし，2 曲線がある点で接するとは，その点を共有し，さらにその点において共通の接線をもつことである．

6　第 6 日目

21　$2^a + 2^b$ が平方数になるような整数 a，b（$0 \leqq a < b$）の条件を求めよ．ただし，平方数とは，整数の 2 乗である数のことである．

22　サイコロを n 回投げたとき，1 の目が出る回数と 2 の目が出る回数がともに奇数である確率を求めよ．

23　xy 平面上に放物線 $C : y = x^2$ があり，C 上の 2 点 A，B が AB $= 1$ を満たしながら動いている．このとき，A を通り x 軸に垂直な直線，B を通り x 軸に垂直な直線，x 軸，および放物線 C によって囲まれてできる図形の面積 S の最小値を求めよ．

24　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \log(1 + a_n)\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定義する．
$a_n \geqq \dfrac{1}{n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ．また，

$$b_n = (1 + a_1)(1 + a_3)\cdots(1 + a_{2n-1})\ (\mathrm{n}=1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ \cdots)$$

とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の収束，発散を調べよ．

7　第 1 回模擬テスト

$\boxed{25}$　三角形 ABC があり，$\angle \mathrm{BCA} = \dfrac{\pi}{3}$，$\mathrm{BC} = a$，$\mathrm{CA} = b$，$\mathrm{AB} = 1$ とする．$a + b$ のとり得る値の範囲を求めよ．

$\boxed{26}$　O を原点とする xy 平面上の楕円 $E : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - 1} = 1$ （$a > 1$） の焦点を x 座標の小さい順に F_1，F_2 とする．E 上の点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ が第 1 象限にあり，$\angle \mathrm{F}_1\mathrm{PF}_2 = 90^\circ$ を満たすものとする．

(1) a の範囲を求め，X と Y を a を用いて表せ．

(2) a の値が (1) で求めた範囲にあるとき，y 軸と直線 PF_1，直線 PF_2 の交点をそれぞれ Q，R とする．線分の長さの比 $\mathrm{OQ} : \mathrm{OR}$ を a を用いて表せ．

$\boxed{27}$　平面上に三角形 ABC と点 K がある．定数 α，β，γ に関する次の (条件) を考える．

(条件)　　平面 ABC 上の任意の点 O に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成り立つ．

この (条件) を満たす実数の組 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ が，ただ一組存在することを示せ．

8　第 2 回模擬テスト

28　三角形 ABC の内角 ∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ α，β，γ とし，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とする．次の条件（イ），（ロ）を満たすとき，三角形 ABC は正三角形であることを示せ．

（イ）$\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$ はこの順に等差数列をなす．

（ロ）α，β，γ は適当に並び替えると等差数列をなす．

29　$a > 0$，$a \neq 1$ とする．座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円 C と，点 A$(a,\ 0)$ がある．次の条件を満たす C 上の点 P がただ 1 つ存在するような a の値と，そのときの C 上の点 P の座標を求めよ．

（条件）　点 P を中心として点 A を反時計まわりに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点が C 上にある．

30　n を 2 以上の整数とする．テーブルの上に n 枚のカードが 1 列に並べられていて，k 番目のカードには表に数 $2k-1$，裏に数 $2k$ が書かれている（$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$）．この状態から以下の操作を $n-1$ 回行う．

テーブルの上にあるカードの表裏に書かれているすべての数の中から無作為に異なる 2 個の数 a，b（$a < b$）を選ぶ．

- a，b が異なるカードに書かれている場合は，a が書かれた面と b が書かれた面が表と裏になるようにその 2 枚のカードを貼り合わせ，以降そのカードを表に a，裏に b が書かれた 1 枚のカードとして扱う．
- a，b が同じカードの表裏に書かれている場合は，そのままにしておく．

$n-1$ 回の操作が終わったとき，テーブルの上にカードが 1 枚だけの残り，そのカードのどちらかの面に 1 が書かれている確率を求めよ．

9　第 3 回模擬テスト

$\boxed{31}$　三角形 ABC とその内部の点 P は

$$\mathrm{AB}=2,\ \mathrm{BC}=4,\ \mathrm{CA}=3$$

$$\mathrm{PA}:\mathrm{PB}:\mathrm{PC}=1:2:4$$

を満たしている．線分 PA の長さを求めよ．

$\boxed{32}$　a を実数の定数とする．x の方程式

$$2(x^2+ax)^2+2a(x^2+ax)-a^2=0$$

が，絶対値が 1 である虚数解を解にもつような a の値の範囲をもとめよ．

$\boxed{33}$　線分 OD，AE，BF，CG を辺にもつ平行六面体 OABC-DEFG が次の条件 (i)，(ii) をいずれも満たしているとき，その体積 V のとり得る値の範囲を求めよ．

(i) $\mathrm{OA}=1$，$\mathrm{OC}=2$，$\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{2}$

(ii) OF $\perp$ 平面 ACD

10　第 4 回模擬テスト

$\boxed{34}$　座標平面上に 3 点 A(2, 0)，B(0, 2)，P(X, Y) がある．X，Y が $X^2+XY+Y^2=1$ を満たしながら変化するとき，三角形 ABP の面積の最大値，最小値を求めよ．

$\boxed{35}$　n は 2 以上の整数とする．赤球が 2 個，白球が 1 個の計 3 個の球が入っている袋 A と，赤球が 1 個，白球が 2 個の計 3 個の球が入っている袋 B がある．A，B のいずれか一方から球を 1 個取り出し，色を確認してから元の袋に戻すという操作を n 回行う．

1 回目は A から取り出し，2 回目以降は，前回，白球を取り出していれば，A から取り出し，前回，赤球を取り出していれば，B から取り出す，とする．

$n-1$ 回目までの操作で赤球を 1 回だけ取り出し，かつ n 回目の操作で赤球を取り出す確率を求めよ．

$\boxed{36}$　異なる 2 点で交わる半径 1 の 2 つの円を考える．この 2 交点間の距離を d とし，2 つの円の中心間の距離を l とする．次の条件を満たす実数の定数 α の範囲を求めよ．

（条件）　$\displaystyle\lim_{l\to 2-0}\frac{d}{(2-l)^{\alpha}}$ が 0 でない有限の値に収束する．