高３ 夏期セミナー センター数学ⅡＢ ～上級～

No.1　図形と方程式

例１ ☝円の接線

座標平面上の円 $x^2+y^2=10$ を C とし、x の関数 $y=\left|k(x-2)\right|-4$ のグラフを G とする。ただし、$k>0$ である。このとき、C と G の共有点の個数について考えよう。

(1) グラフ G は直線 $x=\boxed{\text{ア}}$ に関して対称であり、k の値にかかわらず点 $\mathrm{A}\left(\boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウエ}}\right)$ を通る。

点 A を通り C に接する直線を l とする。l の方程式を求めよう。接点を $\mathrm{P}(a,b)$ とすると、l の方程式は

$$\boxed{\text{オ}}\,x+\boxed{\text{カ}}\,y=10$$

と表される。点 A は l 上にあり、点 P は C 上にあるので

$$\begin{cases}\boxed{\text{キ}}\,a-\boxed{\text{ク}}\,b=10\\ a^2+b^2=10\end{cases}$$

が成り立つ。したがって、接線 l の方程式は

$$y=\boxed{\text{ケ}}\,x-\boxed{\text{コサ}}\quad\text{または}\quad y=\frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(x+\boxed{\text{ソタ}}\right)$$

である。

(2) C と G の共有点が 2 個となるような k の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}<k<\boxed{\text{テ}}$$

である。

(3) C と G の共有点が 3 個となるような k の値は $k=\boxed{\text{ト}}$ である。このとき、3 個のうち 2 個の共有点の座標は、連立方程式

$$\begin{cases}\boxed{\text{ナ}}\,x+y=\boxed{\text{ニ}}\\ x^2+y^2=10\end{cases}$$

を解くことにより得られる。したがって、3 個の共有点の x 座標は

$$\boxed{\text{ヌ}},\ \frac{\boxed{\text{ネ}}\pm\boxed{\text{ノ}}\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

となる。

例２ 内分点と三角関数

座標平面において、原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 上の 2 点 P, Q に対して線分 PQ 上の点 N を PN:NQ= 4 : 1 となるようにとる。ただし、P と Q が一致するときは N は P, Q と同じ点とする。

(1) 点 P, Q の座標をそれぞれ $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, $(\cos\beta,\ \sin\beta)$ とする。ここで、$0 \leqq \alpha < 2\pi,\ 0 \leqq \beta < 2\pi$ とする。このとき、点 N の座標 (X, Y) は

$$X = \frac{\cos\alpha + \boxed{\text{ア}}\ \cos\beta}{\boxed{\text{イ}}},\ Y = \frac{\sin\alpha + \boxed{\text{ウ}}\ \sin\beta}{\boxed{\text{エ}}}$$

で与えられ

$$X^2 + Y^2 = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}\cos(\alpha - \beta) + \frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$$

となるので、点 P, Q を円 C_1 上で動かすとき、$X^2 + Y^2$ のとりうる値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}} \leqq X^2 + Y^2 \leqq 1$$

である。

(2) 点 P, Q を円 C_1 上で動かしたとき、点 N は不等式

$$\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}} \leqq x^2 + y^2 \leqq 1 \qquad \cdots\cdots (*)$$

が表す領域全体を動くことを示そう。

点 Q$(\cos\beta,\ \sin\beta)$ を固定し、点 P を C_1 上で 1 周させたとき、点 N の軌跡は、点

$$\mathrm{T}\left(\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\cos\beta,\ \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\sin\beta\right)$$

を中心とする半径 $\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ の円 C_2 である。

さらに、点 Q を C_1 上で 1 周させたとき、T は原点を中心とする半径 $\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ の円上を 1 周する。したがって、点 Q を C_1 上で 1 周させたとき、円 C_2 が通過してできる図形は、上の不等式 $(*)$ が表す領域と一致する。

高３ 夏期セミナー センター数学ⅡＢ ～上級～

No.2　三角関数

例１ 置き換えと解の個数

a を $0 < a \leqq 1$ をみたす定数とする。$0 \leqq x < 2\pi$ とし、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \cos 2x - 4a\cos x + 2$$

とする。

(1) $f(x) = \boxed{\text{ア}}\left(\cos x - \boxed{\text{イ}}\right)^2 + \boxed{\text{ウ}} - \boxed{\text{エ}}\,a^2$ と表される。

(2) $f(x)$ は、$\cos x = \boxed{\text{オ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{カ}} - \boxed{\text{キ}}\,a^2$ をとり、最大値は $\boxed{\text{ク}} + \boxed{\text{ケ}}\,a$ である。

(3) 方程式 $f(x) = 0$ が 4 個の解をもつのは $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}} < a < \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ のときであり、ちょうど 3 個の解をもつのは $a = \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ のときである。

例２ 半角公式と合成

a, b, c は正の定数とする。$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で定義された２つの関数

$f(\theta) = \left(1 - \sqrt{3}a\right)\sin^2\theta + 2a\sin\theta\cos\theta + \left(1 + \sqrt{3}a\right)\cos^2\theta,$

$g(\theta) = b\sin c\theta + b$ について

(1) $f(\theta)$ を $a,\ \sin 2\theta,\ \cos 2\theta$ を用いて表すと

$$f(\theta) = \boxed{\text{ア}}\left(\sin 2\theta + \sqrt{\boxed{\text{イ}}}\cos 2\theta\right) + \boxed{\text{ウ}}$$

$$= \boxed{\text{エオ}}\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}\right) + \boxed{\text{キ}}$$

と変形できる。よって、$f(\theta)$ は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{クケ}}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{コ}}\ a + \boxed{\text{サ}}$,

$\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{シ}}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{ス}} - \sqrt{\boxed{\text{セ}}}\ a$ をとる。

(2) $g(\theta)$ の最小値が 0 であるとき、c の値の範囲は $c \geqq \boxed{\text{ソ}}$ である。

このとき、さらに $f(\theta)$ と $g(\theta)$ の最大値と最小値がそれぞれ一致するならば

$a = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}},\ b = \dfrac{\boxed{\text{ツ}} + \boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

例３ ☝ θ の個数

$y = 2\sin\theta\cos\theta - 2(\sin\theta + \cos\theta) - 3$ とする。ただし、θ は変数で $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

$x = \sin\theta + \cos\theta$ とおくと、y は

$$y = x^{\boxed{\text{ア}}} - \boxed{\text{イ}}\,x - \boxed{\text{ウ}}$$

と表せる。また、

$$x = \sqrt{\boxed{\text{エ}}}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}\right)$$

と表せる。

y の最大値は

$$\boxed{\text{カ}}\left(\sqrt{\boxed{\text{キ}}} - \boxed{\text{ク}}\right)$$

であり、y の最小値は

$$\boxed{\text{ケコ}}$$

である。

$y = k$ (k は定数) を満たす θ の値が 3 個あるとき、

$$k = \boxed{\text{サシ}} - \boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

さらに、3 個の θ の値を $\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3$ $(\theta_1 < \theta_2 < \theta_3)$ とするとき、

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}\pi$$

である。

高３ 夏期セミナー センター数学ⅡＢ ～上級～

No.3　指数関数・対数関数

例１ 指数関数の最大最小

関数 $f(x) = 4^x + a \cdot 2^{x+2} + 11a + 3$ について

(1) $t = 2^x$ とおくとき、t のとり得る範囲は $t >$ $\boxed{\text{ア}}$ である。

また、$f(x)$ を t の式で表すと $f(x) = t^2 +$ $\boxed{\text{イウ}}$ $t +$ $\boxed{\text{エオ}}$ $a +$ $\boxed{\text{カ}}$ となる。

(2) $f(x)$ の最小値が -17 となるとき、a の値は $a = \dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(3) x の方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの負の解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めると、$\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シス}}} < a < \dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

例２ 指数関数と対称式

関数 $f(x)=3^{3x+1}+3^{-3x+1}-4\left(3^{2x+1}+3^{-2x+1}\right)-7(3^x+3^{-x})+40$ について

(1) $t=3^x+3^{-x}$ とおく。$3^{3x+1}+3^{-3x+1}$ および $3^{2x+1}+3^{-2x+1}$ を t の式で表すと

$$3^{3x+1}+3^{-3x+1}=\boxed{\text{ア}}\left(t^{\boxed{\text{イ}}}-\boxed{\text{ウ}}\,t\right),$$

$$3^{2x+1}+3^{-2x+1}=\boxed{\text{エ}}\left(t^{\boxed{\text{オ}}}-\boxed{\text{カ}}\right)$$ であるから、

$f(x)$ を t の式で表すと

$$f(x)=\boxed{\text{キ}}\,t^3-\boxed{\text{クケ}}\,t^2-\boxed{\text{コサ}}\,t+\boxed{\text{シス}}$$ となる。

また、t の値のとり得る範囲は $t\geqq\boxed{\text{セ}}$ である。

(2) t の 3 次式 $\boxed{\text{キ}}\,t^3-\boxed{\text{クケ}}\,t^2-\boxed{\text{コサ}}\,t+\boxed{\text{シス}}$ を因数分解すると

$$\boxed{\text{キ}}\,t^3-\boxed{\text{クケ}}\,t^2-\boxed{\text{コサ}}\,t+\boxed{\text{シス}}$$
$$=\left(t-\boxed{\text{ソ}}\right)\left(\boxed{\text{タ}}\,t^2-\boxed{\text{チツ}}\right)$$ となるから、

x の方程式 $f(x)=0$ を満たす実数解は全部で $\boxed{\text{テ}}$ 個あり、

そのうち 最も大きい解は $x=\log_3\left(\boxed{\text{ト}}+\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}\right)$,

2 番目に大きい解は $x=\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

例 3 ☝対数関数の最大最小①

(1) 関数

$$y = \log_2(8-x) + \log_2(x-2)$$

について、y が存在するための x の範囲は

$$\boxed{\text{ア}} < x < \boxed{\text{イ}}$$

であり、このとき y は

$$x = \boxed{\text{ウ}} \text{ で最大値 } \boxed{\text{エ}} \log_2 \boxed{\text{オ}} \quad \left(\text{ただし、} \boxed{\text{エ}} \neq 1\right)$$

をとる。

また、x, y がともに整数となるような x, y の組は 2 個あり、それらは

$$(x, y) = \left(\boxed{\text{カ}}, \boxed{\text{キ}}\right), \left(\boxed{\text{ク}}, \boxed{\text{ケ}}\right) \left(\text{ただし、} \boxed{\text{カ}} < \boxed{\text{ク}}\right)$$

である。

(2) 不等式

$$\log_2(8-x) + \log_2(x-2) < \log_{\sqrt{2}}(x-1)$$

の解は

$$\boxed{\text{ア}} < x < \frac{\boxed{\text{コ}} - \sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}, \quad \frac{\boxed{\text{コ}} + \sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}} < x < \boxed{\text{イ}}$$

である。このような x のうちで、整数であって、かつ

$\log_2(8-x) + \log_2(x-2)$ と $\log_{\sqrt{2}}(x-1)$ の差が最も小さいものは

$$x = \boxed{\text{ス}}$$

である。

高３ 夏期セミナー センター数学ⅡＢ ～上級～

No.4　微分・積分

例１ ☝接線と面積

座標平面上の２つの放物線 $C_1 : y = -x^2 + kx,\ C_2 : y = -x^2 - 2x$ を考える。ただし、k は正の定数とする。

(1) x 座標が a である C_1 上の点における C_1 の接線 l_1 の座標は

$$y = \left(k - \boxed{\text{アイ}}\right)x + \boxed{\text{ウ}}^{\boxed{\text{エ}}}$$

であり、x 座標が b である C_2 上の点における C_2 の接線 l_2 の方程式は

$$y = -\left(\boxed{\text{オ}} + \boxed{\text{カキ}}\right)x + \boxed{\text{ク}}^{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。

(2) l_1 と l_2 が一致するのは

$$a = \frac{k + \boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}},\ b = \frac{-k - \boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

のときであるから、C_1 と C_2 の両方に接する直線 l の方程式は

$$y = \frac{k - \boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}x + \left(\frac{k + \boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\right)^{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。

(3) $C_1,\ l,\ y$ 軸で囲まれた部分の面積を S_1 とし、$C_2,\ l,\ y$ 軸で囲まれた部分の面積を S_2 とすると、$\dfrac{S_1}{S_2} = \boxed{\text{テ}}$ である。

例２ ☝ ２つの放物線で囲まれた図形の面積

２つの放物線 $y=-3x^2+12x$ $\cdots$ ①, $y=5x^2-12x$ $\cdots$ ②について

(1) ２つの放物線①および②で囲まれた図形 F の面積 S は、$S=$ $\boxed{\text{アイ}}$ である。

(2) 放物線①, ②の原点 O 以外の交点を A とする。直線 OA の方程式は $y=$ $\boxed{\text{ウ}}$ x である。よって、直線 OA と放物線①で囲まれる図形の面積を S_1, 直線 OA と放物線②で囲まれる図形の面積を S_2 とすると、$S_1:S_2=$ $\boxed{\text{エ}}$: $\boxed{\text{オ}}$ である。

(3) 直線 $y=mx$ $\left(m>\boxed{\text{ウ}}\right)$ が図形 F の面積を $1:8$ に分けるという。このとき、直線 $y=mx$ と放物線①で囲まれた図形の面積 S_3 を m を用いて表すと、

$S_3=\dfrac{\left(\boxed{\text{カキ}}-m\right)^{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ となるから、m の値を求めると、$m=$ $\boxed{\text{サ}}$ である。

例３ 面積の和の最大・最小

a を $0 < a < 2$ を満たす定数とする。

直線 $y = a(x-2)$ $\cdots$ ①と放物線 $y = x^2 - 2x$ $\cdots$ ②について

(1) 直線①と放物線②の 2 つの交点の x 座標は $\boxed{\text{ア}}$ および $\boxed{\text{イ}}$ である。ただし、$\boxed{\text{ア}} < \boxed{\text{イ}}$ とする。

(2) 直線①と放物線②および y 軸のすべてで囲まれた図形 F_1 の面積を S_1, 直線①と放物線②で囲まれた図形 F_2 の面積を S_2 とし、S_1 と S_2 の和を S とする。

S を a を用いて表すと、$S = \dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}a^3 + \boxed{\text{カ}}\,a^2 - \boxed{\text{キ}}\,a + \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ となる。

(3) a が $0 < a < 2$ の範囲で変化するとき、S は $a = \boxed{\text{コ}} - \sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ のとき

最小値 $\dfrac{\boxed{\text{シ}} - \boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ をとる。

例４ ☝３次関数の決定と接線の本数

a を実数とし、x の２次関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2ax+2a^2+2a$ とする。

$y=f(x)$ のグラフを C とおくと、C 上の異なる２点 $\mathrm{P}\Big(p,\ f(p)\Big)$, $\mathrm{Q}\Big(q, f(q)\Big)$ における接線 l, m の方程式は、それぞれ

$$y=\Big(p-\boxed{\text{ア}}\ a\Big)x-\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}p^2+\boxed{\text{エ}}\ a^2+\boxed{\text{オ}}\ a$$

$$y=\Big(q-\boxed{\text{ア}}\ a\Big)x-\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}q^2+\boxed{\text{エ}}\ a^2+\boxed{\text{オ}}\ a$$

であり、l, m の交点の x 座標は

$$x=\frac{p+q}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。

l, m が垂直に交わるとき

$$pq-\boxed{\text{キ}}\ a(p+q)+\boxed{\text{ク}}\ a^2+\boxed{\text{ケ}}\ =0$$

が成り立つから、l, m の交点は直線

$$y=\boxed{\text{コ}}\ a-\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

上にある。この直線を n とする。

$p=2a+1$ のとき、l の方程式は

$$y=x-\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

となり、この直線を l_1 とすると、直線 n と l_1 との交点の x 座標は

$$x=\boxed{\text{ソ}}\ a$$

である。

ここで、放物線 C, 直線 l_1, および直線 $x=\boxed{\text{ソ}}\ a$ で囲まれる部分の面積を S とすると

$$S=\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。

例５ 軸と曲線で囲まれる図形の面積

m を実数の定数として、2 つの直線

$$mx + y - \sqrt{3}m - 2 = 0 \qquad \cdots ①$$

$$x - my + \sqrt{3} = 0 \qquad \cdots ②$$

を考える。

①は定点 $\left(\sqrt{\boxed{ア}},\ \boxed{イ}\right)$ を、②は定点 $\left(\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}},\ \boxed{オ}\right)$ を通る。

また、①と②のなす角を θ とすると、$\theta = \boxed{カキ}^\circ$ である。したがって、m がすべての実数値をとるとき、2 つの直線の交点は円

$$x^2 + y^2 - \boxed{ク}\,y - \boxed{ケ} = 0 \qquad \cdots ③$$

をえがく。ただし、点 $\left(\sqrt{\boxed{コ}},\ \boxed{サ}\right)$ を除く。

円③は y 軸と交点 $\left(0,\ \boxed{シ}\right)$, $\left(0,\ \boxed{スセ}\right)$ をもつ。

(1) a, b, c を実数の定数とする。点 $\left(\sqrt{\boxed{ア}},\ \boxed{イ}\right)$, $\left(0,\ \boxed{スセ}\right)$ をそれぞれ A, B とすると、放物線

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \cdots ④$$

が点 A, B を通るとき

$$b = \sqrt{\boxed{ソ}}\left(\boxed{タ} - a\right),\ c = \boxed{チツ}$$

である。

(2) (1)において $a = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、放物線④の点 B における接線の方程式を $y = f(x)$ とし、円③の中心を C, 直線 $y = f(x)$ と円③の点 B 以外の交点を D とすると

$$\angle \mathrm{ACD} = \boxed{テト}^\circ$$

である。このとき、連立不等式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \boxed{ク} - \boxed{ケ} \leqq 0 \\ y \leqq ax^2 + bx + c \\ y \geqq f(x) \end{cases}$$

で表される領域の面積を S とすると

$$S = \frac{\pi}{\boxed{ナ}} + \frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}} - \frac{\boxed{ネ}\sqrt{\boxed{ノ}}}{\boxed{ハ}}$$

である。

例 6 ☝接線の方程式

放物線 $C : y = x^2 - 6x + 9$ がある。放物線 C 上の点 $\mathrm{A}(2, 1)$ における放物線 C の接線を l とする。

(1) 直線 l の方程式は $y = \boxed{\text{アイ}}\,x + \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) 直線 l と 45° の角をなす直線の傾きを m とすると、$m = \boxed{\text{エ}}$ または

$m = \dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(3) 放物線 C の接線で、直線 l と 45° の角をなす接線は 2 本ある。それらの方程式

は $y = \boxed{\text{ク}}\,x - \dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ および $y = \dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}x + \dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ である。

例 7 ☝ 3 次関数のグラフと 3 次方程式の実数解

関数 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 2$ について

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は $f'(x) = \boxed{\text{ア}}\,x^2 - \boxed{\text{イウ}}\,x + \boxed{\text{エオ}}$ であるから、

$f(x)$ は $x = \boxed{\text{カ}}$ のとき極大値 $\boxed{\text{キ}}$, $x = \boxed{\text{ク}}$ のとき極小値 $\boxed{\text{ケコサ}}$ をとる。

(2) $y = f(x)$ のグラフは、x 軸と 3 点 $\left(\boxed{\text{シ}}, 0\right)$, $\left(\dfrac{\boxed{\text{ス}} - \boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}, 0\right)$,

$\left(\dfrac{\boxed{\text{ス}} + \boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}, 0\right)$ で交わる。

(3) a を正の定数とする。$0 \leqq x \leqq a$ における $f(x)$ の最大値が $f(x)$ の極大値と一致するとき、a の値の範囲は $\boxed{\text{チ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{ツ}}$ である。

(4) 方程式 $f(x) = k$ が異なる 2 つの正の解をもつとき、定数 k の値の範囲は

$k = \boxed{\text{テ}}$ または $\boxed{\text{トナニ}} < k \leqq \boxed{\text{ヌネ}}$ である。

例８ 3次関数の決定と接線の本数

3次関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx-16$ は $x=4$ で極小値 0 をとる。

(1) a, b の値を求めると、$a=$ $\boxed{\text{アイ}}$, $b=$ $\boxed{\text{ウエ}}$ である。

また、$f(x)$ は $x=$ $\boxed{\text{オ}}$ のとき、極大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{T}\Big(t,\ f(t)\Big)$ におけるこの曲線の接線の方程式は

$$y=\Big(\boxed{\text{キ}}\,t^2-\boxed{\text{クケ}}\,t+\boxed{\text{コサ}}\Big)x-\boxed{\text{シ}}\,t^3+\boxed{\text{ス}}\,t^2-\boxed{\text{セソ}}$$

である。よって、点 $\mathrm{A}(1,8)$ から曲線 $y=f(x)$ に引いた接線の方程式は

$$y=\boxed{\text{タチ}}\,x-\boxed{\text{ツテ}} \quad \text{または}\ y=\boxed{\text{トナ}}\,x+\boxed{\text{ニヌ}}$$

である。

さらに、点 $\mathrm{P}(0,p)$ から曲線 $y=f(x)$ に異なる 3 本の接線が引けるとき、

定数 p の値の範囲は $\boxed{\text{ネノハ}}$ $<p<$ $\boxed{\text{ヒフ}}$ である。

例 4　☝対数関数の最大最小②

a を正の定数とする。関数 $f(x)=\left(\log_2 4x\right)\left(\log_2 \dfrac{4}{x}\right)+a\log_4 x^4$ $(1 \leqq x \leqq 32)$ について、次の各問いに答えよ。

(1) $t=\log_2 x$ とおく。$f(x)$ を t の式で表すと、

$$f(x)=\boxed{\text{ア}}\,t^2+\boxed{\text{イウ}}\,t+\boxed{\text{エ}}$$ となる。

また、t の値のとり得る範囲は $\boxed{\text{オ}} \leqq t \leqq \boxed{\text{カ}}$ である。

(2) $a=2$ のとき、

$f(x)$ は $x=\boxed{\text{キ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ク}}$

$x=\boxed{\text{ケコ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{サシ}}$ をとる。

(3) $1 \leqq x \leqq 32$ における $f(x)$ の最大値を M とする。

$0<a<\boxed{\text{ス}}$ のとき $M=a^{\boxed{\text{セ}}}+\boxed{\text{ソ}}$

$a \geqq \boxed{\text{ス}}$ のとき $M=\boxed{\text{タチ}}\,a-\boxed{\text{ツテ}}$ であるから、

$M=13$ となるとき定数 a の値を求めると $a=\boxed{\text{ト}}$ である。