２０１７夏セミ　～数と式（１～９）　２次関数の最大最小（１０～２０）～　１学期に学習した内容の復習をかねて、やや難しめの問題に挑戦しよう。

1 [2005 成蹊大]基本

a，b，c が $a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=5$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ を満たすとき，

$ab+bc+ca$，$a^3+b^3+c^3$ の値を求めよ。

2 [2005 東京電機大]標準

$abc=1$，$a+b+c=0$ であるとき，次の式の値を求めよ。

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}+a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

3 [2012 立命館大]標準

$x=\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}$ のとき，x^2-x，x^3-4x，x^4-7x の値を求めよ。

4 [2010 名城大]標準

方程式 $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$ の解 x について，$x+\dfrac{1}{x}=t$ とおくと t の正の値は ア［　　］であり，もとの方程式の解 x の中で最も大きいものは イ［　　］である。

5 [2016 福岡大]基本

不等式 $\sqrt{(x-1)^2}\leqq 2$ を満たす x の範囲は ア［　　］である。また，方程式 $2|x-1|+|x+1|=4$ の解は イ［　　］である。

6 [2015 神奈川大]基本

不等式 $|3x-5|<2x+1$ を満たす x の値の範囲は［　　］である。

7 [2015 大阪経済大]標準

不等式 $|x-7|+|x-8|<3$ の解は $\boxed{\text{ア}}<x<\boxed{\text{イ}}$ である。

8 [2008 國學院大]応用

2つの不等式 $|x-6|<3$ ……①，$|x-k|<5$ ……② がある。ただし，定数 k は実数とする。

(1) (ア) ①の不等式を解け。　(イ) ②の不等式を解け。

(2) ①，②をともに満たす実数 x が存在するような k の値の範囲を求めよ。

(3) ①，②をともに満たす x が整数のとき，解の数が3つとなるような k の値の範囲を求めよ。

9 [17センター追試 センター追試]

(1) $k=\dfrac{6}{\sqrt{3}+1}$ とする。分母を有理化すると $k=\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}-\boxed{\text{ウ}}$ となる。

また，k の整数部分は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(2) x に関する不等式 $6\geqq|(\sqrt{3}+1)x-12|$ を解くと

$$\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}-\boxed{\text{キ}}\leqq x\leqq\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}-\boxed{\text{コ}}$$

となり，この不等式を満たす整数は全部で $\boxed{\text{サ}}$ 個ある。

(3) a を正の実数とし，x に関する不等式 $a\geqq|(\sqrt{3}+1)x-12|$ を考える。

この不等式を満たす整数がちょうど1個になるとき，その整数は $\boxed{\text{シ}}$ であり，そのときの a のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{スセ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}+\boxed{\text{タ}}\leqq a<\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}-\boxed{\text{テ}}$$

である。

10 [2021 神戸学院大]基礎

次の x の 2 次関数 $y=-2x^2+ax+b$ ……① のグラフを考える。ただし，a，b は定数とする。

(1) ① のグラフが 2 点 $(1,\ 1)$，$(4,\ -5)$ を通るとする。

(i) 定数 a，b の値は $a=$ ア□，$b=-$ イ□ である。

(ii) ① のグラフの頂点の座標は $($ ウ□，エ□ $)$ である。

(iii) ① のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に 5 だけ平行移動し，さらに，x 軸に関して対称移動したグラフの方程式は $y=$ オ□ x^2- カ□ $x-$ キ□ である。

(2) ① のグラフが点 $(1,\ -1)$ を通り，頂点が直線 $y=x-1$ 上の第 1 象限の部分にあるとき，① のグラフの方程式は $y=-2x^2+$ ク□ $x-$ ケ□ である。

11 [2021 東北学院大]基礎

関数 $y=-(x^2-2x)^2+2(x^2-2x)$ について，次の問いに答えよ。

(1) x^2-2x の最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(2) y の最大値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(3) $0\leqq x\leqq 2$ のとき，y の最小値と最大値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

12 [2007 千葉大]基礎

a を正の実数とする。2 次関数 $f(x)=ax^2-2(a+1)x+1$ に対して，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ のグラフの頂点の座標を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq 2$ の範囲で $y=f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

13 [2016 法政大]標準

a を実数の定数とし，2 次関数 $y=x^2-2ax+3a$ の $0\leqq x\leqq 4$ における最大値を M，最小値を m とする。

(1)　$a=3$ のとき，$M=$ ア□ かつ $m=$ イ□ である。

(2)　$m=-4$ のとき，$a=$ ウ□，$-\dfrac{\text{エ□}}{\text{オ□}}$ である。

14 [2014 東北学院大]標準

2 次関数 $f(x)=x^2-2ax+a+2$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフが点 $(1,\ 1)$ を通るとき，a の値を求めよ。

(2)　$0\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最小値を m とするとき，a を用いて m を表せ。

(3)　$0\leqq x\leqq 3$ において，常に $f(x)>0$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ。

15 [2012 関西学院大]標準

xy 平面における放物線 $y=x^2-4x+1$ は放物線 $y=x^2$ を x 軸方向に ア□，y 軸方向に イ□ だけ平行移動することによって得られる。

関数 $y=x^2-4x+1$ $(a\leqq x\leqq a+1)$ の最小値を m とおく。ただし，a は実数である。

$a<1$ の場合は $m=$ ウ□ であり，$1\leqq a\leqq 2$ の場合は $m=$ エ□ であり，$a>2$ の場合は $m=$ オ□ である。

16 [2008 同志社大]応用

x の 2 次関数 $f(x)=x^2-2ax+a+2$ を考える。$0\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最大値を M，最小値を m とおく。

(1)　$a<0$ のとき，M，m を a を用いてそれぞれ表せ。

(2)　$0\leqq a<\dfrac{3}{2}$ のとき，M，m を a を用いてそれぞれ表せ。

(3)　$0\leqq x\leqq 3$ を満たすすべての x について不等式 $0<f(x)<6$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ。

17 [2015 東京理科大]応用

a を実数の定数とし，x の関数 $f(x)=ax^2+4ax+a^2-1$ を考える。区間 $-4\leqq x\leqq 1$ における関数 $f(x)$ の最大値が 5 であるとき，定数 a の値を求めよ。

18 [2012 芝浦工業大]応用

関数 $f(x)=(2-x)|x+1|$ に対して，$t\leqq x\leqq t+1$ における $f(x)$ の最大値を $g(t)$ とおく。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2)　最大値 $g(t)$ を与える x の値が 2 つあるときの t の値を求めよ。

(3)　$g(t)=f(t)$ を満たす t の範囲を求めよ。

19 [2021 共通テスト追試]

花子さんと太郎さんのクラスでは，文化祭でたこ焼き店を出店することになった。2 人は 1 皿あたりの価格をいくらにするかを検討している。次の表は，過去の文化祭でのたこ焼き店の売り上げデータから，1 皿あたりの価格と売り上げの関係をまとめたものである。

1 皿あたりの価格 (円)	200	250	300
売り上げ数 (皿)	200	150	100

(1)　まず，2 人は，上の表から，1 皿あたりの価格が 50 円上がると売り上げ数が 50 皿減ると考えて，売り上げ数が 1 皿あたりの価格の 1 次関数で表されると仮定した。このとき，1 皿あたりの価格を x 円とおくと，売り上げ数は

$\boxed{\text{アイウ}} - x$　……①

と表される。

(2)　次に，2 人は，利益の求め方について考えた。

花子：利益は，売り上げ金額から必要な経費を引けば求められるよ。
太郎：売り上げ金額は，1 皿あたりの価格と売り上げの積で求まるね。
花子：必要な経費は，たこ焼き用器具の賃貸料と材料費の合計だね。
　　材料費は，売り上げ数と 1 皿あたりの材料費の積になるね。

2 人は，次の 3 つの条件のもとで，1 皿あたりの価格 x を用いて利益を表すことにした。

（条件 1）　1 皿あたりの価格が x 円のときの売り上げ数として ① を用いる。
（条件 2）　材料は，① により得られる売り上げ数に必要な分量だけ仕入れる。
（条件 3）　1 皿あたりの材料費は 160 円である。たこ焼き用器具の賃貸料は 6000 円である。材料費とたこ焼き用器具の賃貸料以外の経費はない。

利益を y 円とおく。y を x の式で表すと

$y = -x^2 + \boxed{\text{エオカ}}x - \boxed{\text{キ}} \times 10000$　……②

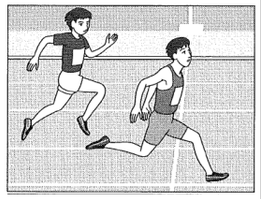
である。

(3)　太郎さんは利益を最大にしたいと考えた。② を用いて考えると，利益が最大になるのは 1 皿あたりの価格が $\boxed{\text{クケコ}}$ 円のときであり，そのときの利益は $\boxed{\text{サシスセ}}$ 円である。

(4)　花子さんは，利益を 7500 円以上となるようにしつつ，できるだけ安い価格で提供したいと考えた。② を用いて考えると，利益が 7500 円以上となる 1 皿あたりの価格のうち，最も安い価格は $\boxed{\text{ソタチ}}$ 円となる。

20 [21共通テスト本試(第1日程) 共通テスト本試]

陸上競技の短距離 100 m 走では，100 m を走るのにかかる時間(以下，タイムと呼ぶ)は，1 歩 あたりの進む距離(以下，ストライドと呼ぶ)と 1 秒あたりの歩数(以下，ピッチと呼ぶ) に関係がある。ストライドとピッチはそれぞれ以下の式で与えられる。



$$\text{ストライド (m/歩)} = \frac{100\,(\text{m})}{100\text{ m を走るのにかかった歩数 (歩)}}$$

$$\text{ピッチ (歩/秒)} = \frac{100\text{ m を走るのにかかった歩数 (歩)}}{\text{タイム (秒)}}$$

ただし，100 m を走るのにかかった歩数は，最後の 1 歩がゴールラインをまたぐこともあるので，小数で表される。以下，単位は必要のない限り省略する。

例えば，タイムが 10.81 で，そのときの歩数が 48.5 であったとき，ストライドは $\frac{100}{48.5}$ より約 2.06，ピッチは $\frac{48.5}{10.81}$ より約 4.49 である。

なお，小数の形で解答する場合は，**解答上の注意**にあるように，指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入して答えよ。また，必要に応じて，指定された桁まで ⓪ にマークせよ。

(1)　ストライドを x，ピッチを z とおく。ピッチは 1 秒あたりの歩数，ストライドは 1 歩あたりの進む距離なので，1 秒あたりの進む距離すなわち平均速度は，x と z を用いて [ア] (m/秒) と表される。

これより，タイムと，ストライド，ピッチとの関係は

$$\text{タイム} = \frac{100}{\boxed{\text{ア}}} \quad \cdots\cdots ①$$

と表されるので，[ア] が最大になるときにタイムが最もよくなる。ただし，タイムがよくなるとは，タイムの値が小さくなることである。

[ア] の解答群

⓪ $x+z$	① $z-x$	② xz
③ $\frac{x+z}{2}$	④ $\frac{z-x}{2}$	⑤ $\frac{xz}{2}$

(2)　男子短距離 100 m 走の選手である太郎さんは，① に着目して，タイムが最もよくなるストライドとピッチを考えることにした。

次の表は，太郎さんが練習で 100 m を 3 回走ったときのストライドとピッチのデータである。

	1 回目	2 回目	3 回目
ストライド	2.05	2.10	2.15
ピッチ	4.70	4.60	4.50

また，ストライドとピッチにはそれぞれ限界がある。太郎さんの場合，ストライドの最大値は 2.40，ピッチの最大値は 4.80 である。

太郎さんは，上の表から，ストライドが 0.05 大きくなるとピッチが 0.1 小さくなるという関係があると考えて，ピッチがストライドの 1 次関数として表されると仮定した。このとき，ピッチ z はストライド x を用いて

$$z = \boxed{\text{イウ}}\,x + \frac{\boxed{\text{エオ}}}{5} \quad \cdots\cdots ②$$

と表される。

② が太郎さんのストライドの最大値 2.40 とピッチの最大値 4.80 まで成り立つと仮定すると，x の値の範囲は次のようになる。

[カ].[キク] $\leqq x \leqq 2.40$

$y=$ [ア] とおく。② を $y=$ [ア] に代入することにより，y を x の関数として表すことができる。太郎さんのタイムが最もよくなるストライドとピッチを求めるためには，[カ].[キク] $\leqq x \leqq 2.40$ の範囲で y の値を最大にする x の値を見つければよい。

このとき，y の値が最大になるのは $x=$ [ケ].[コサ] のときである。

よって，太郎さんのタイムが最もよくなるのは，ストライドが [ケ].[コサ] のときであり，このとき，ピッチは [シ].[スセ] である。また，このときの太郎さんのタイムは，① により [ソ] である。

[ソ] については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから 一つ選べ。

⓪ 9.68	① 9.97	② 10.09
③ 10.33	④ 10.42	⑤ 10.55