1 [2020 関西学院大]

$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で考える。

$\sin 2x + \sin x = 0$ の解のうち最も大きいものは $x =$ ア $\boxed{}$ である。

$\sin 3x - \sin x = 0$ の解のうち最も大きいものは $x =$ イ $\boxed{}$ である。

$\cos 3x + \cos 2x + \cos x + 1 = 0$ の解のうち最も大きいものは $x =$ ウ $\boxed{}$ である。

2 [2021 摂南大]基礎

$0 < x < \pi$ のとき，不等式 $\sin^4 x + 2\sin x \cos x - \cos^4 x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の解は，

$\dfrac{\text{ア}\boxed{}}{\text{イ}\boxed{}}\pi < x < \dfrac{\text{ウ}\boxed{}}{\text{エ}\boxed{}}\pi$ である。

3 [2019 慶応義塾大]基礎

関数 $y = 2\cos^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ は $\theta =$ ア $\boxed{}$ のとき最大値

イ $\boxed{}$ をとる。

$\boxed{4}$ [2021 大分大]標準

$0 \leqq \alpha \leqq \theta \leqq \pi$ とし，$\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$，$x = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ とする。

(1) $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$ の値を求めよ。　　(2) x のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 関数 $y = 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta - \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta + 3$ の最小値を求めよ。

$\boxed{5}$ [2020 関西大]標準

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，関数 $f(x) = \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x + 1 - 2\sin x\cos x$ を考える。

(1) $t = \sin x - \cos x$ とおく。t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $f(x)$ を (1) で定義した t を用いて表せ。

(3) $f(x)$ の最小値と最大値を求めよ。さらにそのときの x の値を求めよ。

$\boxed{6}$ [2012 岩手大]標準

関数 $f(x) = 2\sin^2 x + 4\sin x + 3\cos 2x$ について，次の問いに答えよ。ただし，$0 \leqq x < 2\pi$ である。

(1) $t = \sin x$ とするとき，$f(x)$ を t の式で表せ。

(2) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値をすべて求めよ。

(3) 方程式 $f(x) = a$ の相異なる解が 4 個であるような実数 a の値の範囲を求めよ。

7 [2011 大阪大]応用

x，y は $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ の範囲にある 0 でない実数で，次の等式

$$\sin^3 x+\sin^3 y=\frac{3\sqrt{15}}{32},\quad \frac{\sin y}{\sin x}+\frac{\sin x}{\sin y}=3$$

を満たすとする。このとき，$x+y$ の値を求めよ。

8 [2007 静岡大]応用

(1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおく。$\sin\theta\cos\theta$ を t を用いて表せ。

(2) $0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，$t=\sin\theta+\cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，θ の方程式 $2\sin\theta\cos\theta-2(\sin\theta+\cos\theta)-k=0$ の解の個数を，定数 k が次の 3 つの値の場合について調べよ。

$$k=1,\quad k=1-2\sqrt{2},\quad k=-1.9$$

9 [2020 関西学院大]応用

θ を $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ を満たす実数とし，$t=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ とする。このとき，t のとりうる値の範囲は ア［　　］である。更に，a を定数とし，

$y=a\sin\theta+a\sqrt{3}\cos\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta$ とするとき，y を t の 2 次式で表すと，

$y=$ イ［　　］となる。$a=3$ のとき，y の最小値は ウ［　　］である。また，y が最小値をとる θ の値が 2 つあるような a の値の範囲は エ［　　］である。

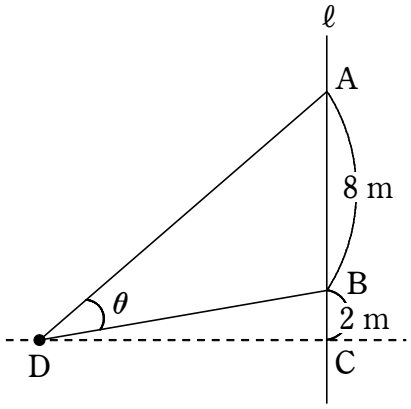
10 [2021 静岡大]応用

次の 問題 について，しずかさん，れいさん，ゆうだいさんの 3 人が議論をしている。

問題 ある学校の文化祭では，縦 8 m の垂れ幕が垂直な壁にかかっていて，垂れ幕の下端がある人の目の高さより 2 m 上方の位置にある。この人が壁から何 m 離れて見ると，この垂れ幕の上端と下端を見込む角が最大となるか。

しずか

右図のように，直線 ℓ を壁として，点 A を垂れ幕の上端，点 B を垂れ幕の下端，点 D を垂れ幕を見ている人の目の位置とした。この垂れ幕の上端と下端を見込む角 ∠ADB の大きさを θ とおいて，θ が最大となるときの点 D の位置を求めればよい。



れい

θ が最大となるときの点 D の位置を求めたいから，点 D から直線 ℓ に垂線 DC を下ろし，線分 DC の長さを x m とする。そして，三角比を使って式を作ればよい。

ゆうだい

角度の問題だから，2 点 A，B を通り半直線 CD に接する円をかいて，円周角の定理あるいは円周角の定理の逆を使えばよい。

(1) 図とれいさんの考えを使って 問題 を解くとき，次の小問に答えよ。

(i) ∠ADC$=\alpha$，∠BDC$=\beta$ として，$\tan\theta$ を $\tan\alpha$，$\tan\beta$ を用いて表せ。

(ii) $\tan\theta$ を x を用いて表せ。

(iii) θ が最大となるときの，$\tan\theta$ と x の値をそれぞれ求めよ。

(2) 図とゆうだいさんの考えを使って 問題 を解くとき，この人がこの垂れ幕の上端と下端を見込む角が最大となる位置は，ゆうだいさんのかいた円と半直線 CD との接点になることを示せ。

$\boxed{11}$ [20センター追試 センター追試]標準

関数 $f(x)=\sqrt{3}\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos 3x$ について考える。

(1)　三角関数の加法定理および合成を用いると

$$f(x)=-\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\sin 3x+\frac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{イ}}}\cos 3x$$

$$=\boxed{\text{オ}}\sin\left(3x+\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi\right)$$

と表される。ただし，$0<\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi\leqq 2\pi$ とする。

したがって，$f(x)$ の最大値は $\boxed{\text{ク}}$ である。また，$f(x)$ の正の周期のうち最小のものは $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$ である。

(2)　$f(x)$ を $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で考えたとき，実数 t に対して $f(x)=t$ となる x の値の個数 N を調べよう。$3x+\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$ のとり得る値の範囲に注意すると，次のことがわかる。

$|t|>\boxed{\text{ク}}$ のとき，$N=\boxed{\text{サ}}$ である。

$t=\boxed{\text{ク}}$ のとき，$N=\boxed{\text{シ}}$ である。

$t=f(0)$ のとき，$N=\boxed{\text{ス}}$ である。

$|t|<\boxed{\text{ク}}$ かつ $t\neq f(0)$ のとき，$N=\boxed{\text{セ}}$ である。

$t=-\boxed{\text{ク}}$ のとき，$N=\boxed{\text{ソ}}$ である。

$\boxed{12}$ [09センター本試(旧課程) センター本試]標準

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $5\sin\theta - 3\cos 2\theta = 3$ ……(＊)を満たす θ について考えよう。

方程式(＊)を $\sin\theta$ を用いて表すと，$\boxed{\text{ア}}\sin^2\theta + 5\sin\theta - \boxed{\text{イ}} = 0$ となる。したがって，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より $\sin\theta = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ であり，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲でこの等式を満たす θ のうち，小さい方を θ_1，大きい方を θ_2 とすると

$$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{エ}}},\quad \cos\theta_2 = \frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$ である。

θ_1 について不等式 $\boxed{\text{キ}}$ が成り立つ。$\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $0 < \theta_1 < \dfrac{\pi}{12}$　① $\dfrac{\pi}{12} < \theta_1 < \dfrac{\pi}{6}$　② $\dfrac{\pi}{6} < \theta_1 < \dfrac{\pi}{5}$

③ $\dfrac{\pi}{5} < \theta_1 < \dfrac{\pi}{4}$　④ $\dfrac{\pi}{4} < \theta_1 < \dfrac{\pi}{3}$　⑤ $\dfrac{\pi}{3} < \theta_1 < \dfrac{\pi}{2}$

ただし，必要ならば，次の値 $\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$，$\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ を用いてもよい。

さらに，不等式 $n\theta_1 > \theta_2$ を満たす自然数 n のうち最小のものは $\boxed{\text{ク}}$ である。

13 [2021 東北学院大]基礎

不等式 $9\left(\frac{4}{9}\right)^x+5\left(\frac{2}{3}\right)^x \leqq 4$ を解くと $\boxed{}$ である。

14 [2015 信州大]基礎

方程式 $3(4^x+4^{-x})-13(2^x+2^{-x})+16=0$ を解け。

15 [2016 関西学院大]基礎

実数 x に対して，$t=2^x+2^{-x}$ とおくと，t のとりうる値の範囲は $t \geqq$ ア$\boxed{}$ である。また，関数 $y=4^{x+1}+4^{-x+1}-17(2^{x+1}+2^{-x+1})+80$ を t の式で表すと，$y=$ イ$\boxed{}$ となる。したがって，y は $x=$ ウ$\boxed{}$，エ$\boxed{}$ のとき最小値 オ$\boxed{}$ をとる。ただし，ウ$\boxed{}$ $<$ エ$\boxed{}$ である。

16 [2005 日本女子大]標準

a を定数とする。x についての方程式

$$4^{x+1}-2^{x+4}+5a+6=0$$

が異なる 2 つの正の実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

17 [2009 東北大]標準

すべての実数 x に対して不等式 $2^{2x+2}+2^x a+1-a>0$ が成り立つような実数 a の範囲を求めよ。

18 [2021 福井大]応用

$f(x)=16\cdot 9^x-4\cdot 3^{x+2}-3^{-x+2}+9^{-x}$ とし，$t=4\cdot 3^x+3^{-x}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) t の最小値とそのときの x の値を求めよ。

(2) $f(x)$ を t の式で表せ。

(3) x の方程式 $f(x)=k$ の相異なる実数解の個数が 3 個であるとき，定数 k の値と，3 つの実数解を求めよ。

19 [18センター追試 センター追試]標準

a を定数とする。x の方程式 $4^{x+a}-2^{x+a}+a=0$ ……① がただ一つの解をもつとき，その解を求めよう。

(1) $X=2^x$ とおくと，X のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ア}}$ である。$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

⓪ $X \geqq 0$　　① $X>0$　　② $X \geqq 1$　　③ $X>1$

また，① を X を用いて表すと，X の 2 次方程式

$$2^{\boxed{\text{イウ}}}X^2-2^{\boxed{\text{エ}}}X+a=0 \quad \cdots\cdots ②$$

となる。この 2 次方程式の判別式を D とすると $D=2^{\boxed{\text{イウ}}}\left(\boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{カ}}a\right)$ である。

(2) $a=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき，② は $\boxed{\text{ア}}$ の範囲でただ一つの解をもつ。

したがって，① も　ただ一つの解をもち，その解は $x=\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(3) $a \neq \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき，② が $\boxed{\text{ア}}$ の範囲でただ一つの解をもつための必要十分条件は，$\boxed{\text{コ}}$ である。$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから一つ選べ。

⓪ $a>0$　　① $a<0$　　② $a \geqq 0$

③ $a \leqq 0$　　④ $a>\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$　　⑤ $a<\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$

$\boxed{\text{コ}}$ のとき，① もただ一つの解をもち，その解は

$x=\boxed{\text{サ}}a-\boxed{\text{シ}}+\log_2\left(\boxed{\text{ス}}+\sqrt{\boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{カ}}a}\right)$ である。

20 [2015 岩手大]基礎

方程式 $\log_9(x+4)=\log_3(2x-7)+\log_5\dfrac{1}{5\sqrt{5}}$ を解け。

21 [2015 慶応義塾大]基礎

不等式 $\log_2(5-2x)+2\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\leqq 0$ を満たす x の範囲は $\boxed{}$ である。

22 [2017 関西学院大]基礎

関数 $y=(\log_3 x)^2-\log_{\sqrt{3}}x^2+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{9}{x}$ $\left(\dfrac{1}{27}\leqq x\leqq 27\right)$ ……① について考える。

$t=\log_3 x$ とおき，y を t の式で表すと ${}^{ア}\boxed{}$ となる。よって，関数 ① は $x={}^{イ}\boxed{}$ のとき最小値 ${}^{ウ}\boxed{}$ をとり，$x={}^{エ}\boxed{}$ のとき最大値 ${}^{オ}\boxed{}$ をとる。

23 [2017 関西学院大]基礎

関数 $y=\left(\log_2\dfrac{x}{4}\right)\left(\log_8\dfrac{x}{8}\right)$ $(1\leqq x\leqq 16)$ は $x={}^{ア}\boxed{}$ で最小値 ${}^{イ}\boxed{}$ をとり，$x={}^{ウ}\boxed{}$ で最大値 ${}^{エ}\boxed{}$ をとる。また，$y=\dfrac{5}{4}$ となる x の値は $x={}^{オ}\boxed{}$ である。

24 [2021 宮城教育大]標準

$x \geqq 1$ かつ $y \geqq 3$ かつ $xy^2 = 27$ のとき，$(\log_3 x)\cdot(\log_3 y)$ の最大値と最小値を求めよ。

25 [2004 昭和薬科大]標準

a は正の定数で $a \neq 1$ とする．x に関する不等式 $\log_a(2a^2 - x^2) \geqq \log_a(2ax - a^2)$ を解け.

26 [2011 日本女子大]標準

a を 1 より大きい定数とする。関数

$$f(x) = (\log_2 x)^2 - \log_2 x^4 + 1 \quad (1 \leqq x \leqq a)$$

の最小値を求めよ。

27 [2000 関西大]応用

$a > 1$，$b > 1$ とする．$\log_a b + 2\log_b a - 3 > 0$ を満たす点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ.

28 [2017 摂南大]応用

a を実数の定数とする。x に関する方程式 $\log_2(x-1) - \log_4(2x-a) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，a の値の範囲は ア $\boxed{} < a <$ イ $\boxed{}$ である。