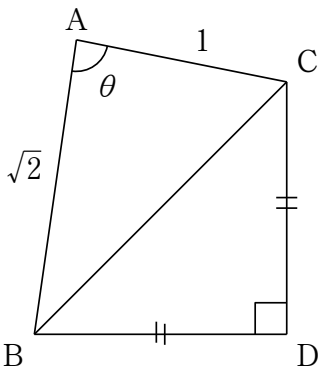
11

辺 BC を共有する 2 つの三角形 ABC，BCD があり，AB $=\sqrt{2}$，AC $=1$，BD $=$ CD，$\angle$BDC $=90^\circ$ を満たしている．この 2 つの三角形の面積の和の最大値を求めよ．

（2016 年 11 月京大オープン文系　平均 13.4 点/30 点）

考え方　「最大値を求めよ」なので，変数を設定し，面積を関数として表す必要があります．図形問題なので，変数を設定するとすれば「辺の長さ」か「角度」です．まずは，面積をその変数で表すことが目標なので，「角度」を設定するのが良いでしょう．「辺の長さ」を変数にすると，面積がとんでもない式になってしまうからです．

解



$\angle$BAC $=\theta$ ($0^\circ<\theta<180^\circ$) とおくと，三角形 ABC の面積 S_1 は

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\theta$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$$

また，三角形 ABC において余弦定理より，

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\cos\theta$$
$$=3-2\sqrt{2}\cos\theta$$

三角形 BCD は直角二等辺三角形なので，BD $=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$BC．よって，三角形 BCD の面積 S_2 は

$$S_2=\frac{1}{2}\mathrm{BD}^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{BC}\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}\mathrm{BC}^2$$
$$=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta$$

したがって，2 つの三角形の面積の和を S とすると，

$$S=S_1+S_2$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta$$
$$=\sin(\theta-45^\circ)+\frac{3}{4}$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より，$-45^\circ<\theta-45^\circ<135^\circ$．したがって，$\sin(\theta-45^\circ)$ は $\theta-45^\circ=90^\circ$ のとき，最大値 1 をとるので，S は，$\theta=135^\circ$ のとき，最大値 $\dfrac{7}{4}$ をとる．

■

12

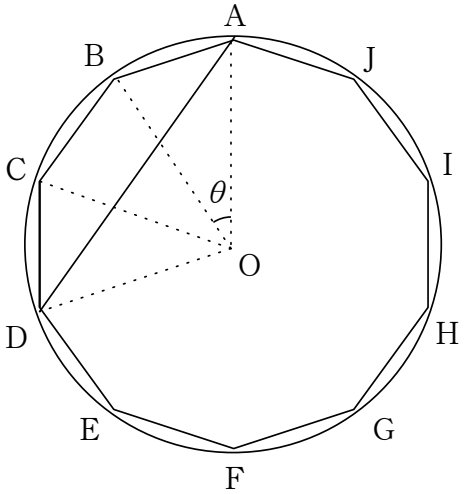
半径 1 の円に内接する正十角形 ABCDEFGHIJ において，2 線分の長さの積 AB･AD の値を求めよ．

（2000 年 11 月東大実戦文系　4.8/20）

考え方　まずは AB や AD の長さをそれぞれ計算したくなるでしょう．その際に，正十角形の中心角を考慮する必要があることに気づくはずです．中心角が 36° なので，いわゆる「36° からみの三角比の値」が登場します．この三角比の値は有名なので，求め方を憶えておく必要があります．この値が分かれば，AB や AD の長さをそれぞれ計算することができます．しかし，

実際に AB や AD の長さをそれぞれ計算する必要があるでしょうか？

解



円の中心を O とする．$\theta = 36^\circ$ とすると，

$$\angle \mathrm{AOB} = \theta, \qquad \angle \mathrm{AOD} = 3\theta$$

である．△OAB，△OAD は二等辺三角形なので，

$$\mathrm{AB} = 2\sin\frac{\theta}{2}, \qquad \mathrm{AD} = 2\sin\frac{3\theta}{2}$$

よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD} &= 4\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\\ &= -2(\cos 2\theta - \cos\theta)\\ &= -2(2\cos^2\theta - \cos\theta - 1)\end{aligned}$$

$5\theta = 180^\circ$ なので，$2\theta = 180^\circ - 3\theta$．よって，

$$\cos 2\theta = \cos(180^\circ - 3\theta)$$

$$\cos 2\theta = -\cos 3\theta$$

$$2\cos^2\theta - 1 = 3\cos\theta - 4\cos^3\theta$$

$$4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 1 = 0$$

$$(\cos\theta + 1)(4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1) = 0$$

$\cos\theta \neq -1$ なので，

$$4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0 \quad \cdots(※)$$

$$2\cos^2\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}$$

したがって，

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD} = -2(2\cos^2\theta - \cos\theta - 1) = -2\left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

■

注　AB や AD の長さを余弦定理で求めた人も多いでしょう．

$$\mathrm{AB}^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos\theta = 2 - 2\cos\theta$$

なので，$\mathrm{AB} = \sqrt{2(1-\cos\theta)}$ となります．ここで半角の公式 $\sin^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{2}$ を用いれば，$\mathrm{AB} = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$ となります．AD についても同様．

注　AB・AD の式変形では，三角関数の積和公式

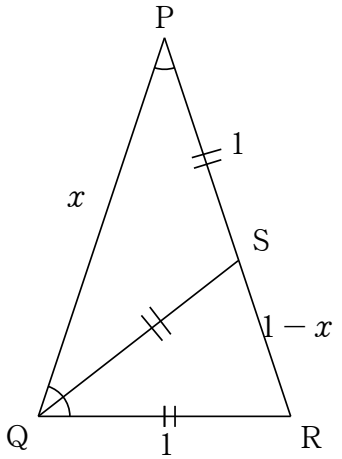
$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$$

を使っています．文系では，「積和公式」や「和積公式」はそんなに登場しませんが，理系は必須です．憶えていない人は確認しといてください．

注　$\cos\theta$ の 2 次方程式 (※) を解けば，$\cos 36^\circ$ の値を求めることができます．この解答の方法が，$\cos 36^\circ$ の値を「代数的に」求める方法です．「図形的に」求める方法は以下の通り．

図のような頂角 36°，底辺の長さが 1 の二等辺三角形 PQR 考え，$\mathrm{PQ} = x$ とする．

角 PQR の二等分線と辺 PR との交点を S とする．



このとき，三角形 QRS も頂角 36° の二等辺三角形になるので，

$$\triangle\mathrm{PQR} \backsim \triangle\mathrm{PQR}$$

$\mathrm{SP} = \mathrm{SQ} = \mathrm{QR} = 1$ なので，

13

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲の θ に対して，$f(\theta) = \sin^3\theta - \cos^2\theta + 2\sin 2\theta$ とおく．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $t = \sin\theta - \cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t を用いて表せ．

(2) $f(\theta) = 0$ を満たす θ の個数を求めよ．

(3) k を実数とする．$f(\theta) = k$ を満たす θ の個数が 2 になるような k の値の範囲を求めよ．

(2019 年 11 月阪大実戦文系　平均 33.3 点/60 点)

14

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲の実数 x，y について，2 つの不等式

$$\cos 2(2x - y) + 3\cos(2x - y) \geqq 1 \quad \cdots\cdots ①$$

$$\sqrt{3}\sin(x + 2y) - \cos(x + 2y) \geqq 1 \quad \cdots\cdots ②$$

がある．

(1) x，y が ① を満たすとき，$2x - y$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) x，y が ② を満たすとき，$x + 2y$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(1) x，y が ① と ② を同時に満たすとき，$x + y$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(2014 年 11 月阪大実戦文系　平均 29.5 点/70 点)

15

(1) xy 平面において，曲線 $y=1-x^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ と x 軸，y 軸によって囲まれる部分の面積は，直線 $x=2\sin 10^\circ$ によって 2 等分されることを示せ.

(2) $0.17 < \sin 10^\circ < 0.18$ であることを示せ.

(2005 年 11 月東大実戦文系　6.4/20)

16

実数 x，y が

$$4\log_9(2x+y)+\log_{\frac{1}{3}}(x+2y)=\log_3 y$$

を満たすとき，以下の問いに答えよ.

(1) y を x を用いて表せ．また，x のとりうる値の範囲を求めよ.

(2) $z=\cos x+\cos\dfrac{y}{2}$ のとりうる値の範囲を求めよ.

(2008 年 11 月阪大実戦文系　平均 26.3 点/60 点)

17

(1) 三角形 ABC において，

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$$

が成り立つことを示せ.

(2) 三角形 ABC において，

$$\cos A : \cos B : \cos C = -\sqrt{3} : \sqrt{6} : 2\sqrt{2}$$

が成り立つとき，三辺の長さの比 BC : CA : AB を求めよ.

(2000 年 11 月東大実戦理系　理 7.7/20)

18

三角形 ABC において，$2\angle A + \angle B = 90^\circ$，辺 CA の長さは 1，面積は $\sqrt{5}$ であるとき，辺 AB, BC の長さを求めよ.

(2002 年 11 月東大実戦文理共通　文 6.9/20　理 10.7/20)

19

実数 x，y は $2^{2x}+2^{2y}-2^{x+y}=2$ を満たしている．$t=2^x+2^y$ とする．

(1) 2^{x+y} を t を用いて表せ．

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ．

(3)

$$z=2^{3x}+2^{3y}-(2^{2x+y}+2^{x+2y})$$

とする．z を t を用いて表し，z の最小値を求めよ．

(2018 年 11 月阪大実戦文系　平均 32.1 点/70 点)

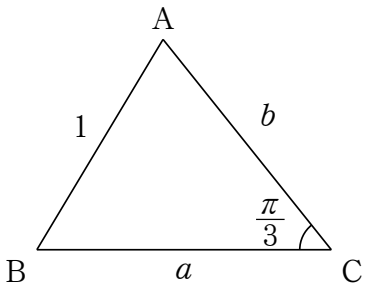
20

三角形 ABC があり，$\angle\mathrm{BCA}=\dfrac{\pi}{3}$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=1$ とする．$a+b$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(2016 年 8 月京大オープン文系　平均 5.4 点/30 点)

考え方　とりあえず最初の一手としては「正弦定理」か「余弦定理」しかありませんが，今回は角度が C しか分かっていないので，普通は「余弦定理」でしょう．その後の処理は，式の対称性に注目しよう．とても重要な考え方です．
なお，「正弦定理」を用いても解くことができます (⇨注 参照)．

解



余弦定理より

$$1=a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{3}$$

$$a^2+b^2-ab=1$$

■

⇨注　「正弦定理」を用いた別解を紹介しておきます．

別解

$\angle\mathrm{BAC}=\alpha$，$\angle\mathrm{ABC}=\beta$ とおくと，正弦定理より

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$a=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha,\qquad b=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\beta$$

$\alpha+\beta+\dfrac{\pi}{3}=\pi$ より，$\alpha+\beta=\dfrac{2}{3}\pi$

21

AB = AC = 1，$\angle$BAC = $\dfrac{\pi}{2}$ である直角二等辺三角形 ABC の内部に点 D があり，

$$\angle \mathrm{ADB} = \frac{\pi}{2}, \qquad \angle \mathrm{ABD} = \angle \mathrm{BCD}$$

である．三角形 ABD の面積を求めよ．

（2015 年 11 月京大 op 文　11.1/30）

22

a は 1 でない正の定数とする．

$$f(x) = (\log_4 8x)\left(\log_4 \frac{4}{x}\right)$$

について，$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$ における $\log_a f(x)$ の最大値が 2 であるような a の値を求めよ．

（2015 年 8 月京大オープン文系　平均 9.9 点/30 点）

23

AB $=1$，$\angle$B $=2\theta$，$\angle$C $=\theta$（$\theta<45^\circ$）を満たす三角形 ABC を考える．
辺 BC 上に CD $=1$ となる点 D をとり，辺 AB 上に AE $=\dfrac{1}{2}$BD となる点 E をとる．
(1) BD を θ で表せ．
(2) 四角形 AEDC の面積 S を θ で表せ．
(3) $t=\sin 2\theta$ とおいて，(2) の S を t で表し，S の最大値を求めよ．
（2004 年 8 月東大オープン文系　6.6/20）

24

a を実数の定数とする．

$$\cos 3\theta > \cos 2\theta, \qquad a+2\cos 2\theta = \cos\theta$$

がともに成り立つような実数 θ が存在する a の値の範囲を求めよ．
（2017 年 11 月京大オープン文理共通　文 14.3 点/30 点　理 14.8/30）

25

θ の関数

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta-\sqrt{2}k\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+k^2$$

がある．ただし，k は正の定数である．

(1) $\sin 2\theta$，$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ のそれぞれを $\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ．

(2) (i) $f(\theta)$ を $(\sin\theta-p)(\cos\theta-q)$（$p$，$q$ は定数）の形で表せ．

(2) (ii) $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，方程式 $f(\theta)=0$ を $0\leqq\theta<2\pi$ において解け．

(3) θ の方程式 $f(\theta)=0$ が $0\leqq\theta<2\pi$ において相異なる 4 個の解をもつような k の値の範囲を求めよ．

(4) (3) のとき，θ の方程式 $f(\theta)=0$ の $0\leqq\theta<2\pi$ における最小の解を α，最大の解を β とする．$\alpha+\beta=\frac{5}{3}\pi$ となるような k の値を求めよ．

（2020 年第 2 回高 2 全統模試）

26

θ の関数

$$f(\theta)=-5\cos 2\theta-4\sin\theta+7$$

がある．

(1) $f\left(\frac{5}{6}\pi\right)$ の値を求めよ．

(2) $t=\sin\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t の式で表せ．

(3) $\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{7}{6}\pi$ のとき，θ の方程式 $f(\theta)=\frac{5}{2}$ の異なる解の個数を求めよ．

(4) k を実数の定数とする．$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{7}{6}\pi$ のとき，θ の方程式 $f(\theta)=k$ の異なる解の個数がちょうど 2 個となるような k の値の範囲を求めよ．

（2021 年第 2 回高 2 全統模試）