2022冬セミ　高２　理系数学標準～極限と微分法～
極限$\boxed{1}$～$\boxed{4}$　接線$\boxed{5}$～$\boxed{7}$　グラフの増減$\boxed{8}$～$\boxed{12}$　最大最小$\boxed{13}$～$\boxed{16}$　方程式と不等式$\boxed{17}$～$\boxed{24}$

テキスト配布が遅くなってごめん。とりあえず、「接線」から基礎と標準を順番にやる。
ムズそうに見えるが、やってることは基本的。そないに大したことないからガンバレ。冬休みにゆっくり考えてください。

$\boxed{1}$[2000 福島県立医科大]三角関数の極限（基本）

O を原点とする座標平面上に 2 点 A$(2,\ 0)$，B$(0,\ 1)$ がある．自然数 n に対し，線分 AB を $1:n$ に内分する点を P_n とし，$\angle \mathrm{AOP}_n=\theta_n$ とする．ただし，$0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$ である．線分 AP_n の長さを l_n として，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{\theta_n}$ を求めよ．

$\boxed{2}$[2000 大阪府立大]無限級数（基本）

$\triangle \mathrm{OP_1P_2}$ を二等辺三角形とし，$\angle \mathrm{O}=\angle \mathrm{P}_1=\theta$，$\mathrm{OP}_1=1$ とする．直線 OP_1 上に点 P_3 を $\angle \mathrm{OP_2P_3}=\theta$ となるようにとる．次に，直線 OP_2 上に点 P_4 を $\angle \mathrm{OP_3P_4}=\theta$ となるようにとる．以下，同じようにして，点 P_5，P_6，…… をとる．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さを求めよ．

(2)　無限級数 $\mathrm{P_1P_2}+\mathrm{P_2P_3}+\cdots\cdots+\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}+\cdots\cdots$ が収束する θ の値の範囲を求め，そのときの和を求めよ．

$\boxed{3}$[2012 大阪教育大]　漸化式と極限（標準）

1 辺の長さが 1 である正三角形 ABC の辺 BC 上に点 A_1 をとる。A_1 から辺 AB に垂線 $\mathrm{A_1C_1}$ を引き，点 C_1 から辺 AC に垂線 $\mathrm{C_1B_1}$ を引き，さらに点 B_1 から辺 BC に垂線 $\mathrm{B_1A_2}$ を引く。これを繰り返し，辺 BC 上に点 A_1，A_2，……，A_n，……，辺 AB 上に点 C_1，C_2，……，C_n，……，辺 AC 上に点 B_1，B_2，……，B_n，……をとる。このとき，$\mathrm{BA}_n=x_n$ とする。

(1)　BC_n，AC_n を x_n を用いて表せ。

(2)　x_n，x_{n+1} が満たす漸化式を求めよ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。

$\boxed{4}$[2021 近畿大]漸化式と極限（標準）

次の条件 (i)　(ii) によって定まる数列 $\{a_n\}$ を考える。

(i)　$a_1=0$

(ii)　点 $\mathrm{A}_n(a_n,\ 0)$ を通る傾き 1 の直線と直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$ との交点を B_n として，B_n の x 座標を a_{n+1} とする。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　a_2 を求めよ。

(2)　a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4)　三角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n$ の面積を S_n とする。無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ の和を求めよ。

$\boxed{5}$[2018 広島大]グラフの概形と接線（基本）

$f(x)=xe^{-x}$ とおく。

(1)　関数 $y=f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べて，グラフの概形をかけ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$ が成り立つことは，証明なしで用いてよい。

(2)　座標平面において，x 軸上の点 $(a,\ 0)$ を通り曲線 $y=f(x)$ に接する直線が存在しないような a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{6}$[2013 京都産業大]接線（標準）

xy 平面上の曲線 $C:y=e^x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　点 $(a,\ e^a)$ における C の接線の方程式を求めよ。また，点 $(a,\ e^a)$ における C の法線 ℓ_a の方程式を求めよ。

(2)　$a\neq 1$ とする。点 $(1,\ e)$ における C の法線 ℓ_1 と，点 $(a,\ e^a)$ における C の法線 ℓ_a との交点の x 座標を a の式で表せ。

(3)　(2) で求めた a の式を $h(a)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{a\to 1}h(a)$ を求めよ。

$\boxed{7}$[2012 徳島大]接線（標準）

$a>0$ とする。曲線 $y=a^3x^2$ を C_1 とし，曲線 $y=-\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ を C_2 とする。また，C_1 と C_2 に同時に接する直線を ℓ とする。

(1)　直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2)　直線 ℓ と曲線 C_1，C_2 との接点をそれぞれ P，Q とする。a が $a>0$ の範囲を動くとき，2 点 P，Q 間の距離の最小値を求めよ。

2022冬セミ　高２　理系数学標準～極限と微分法～
極限1～4　接線5～7　グラフの増減8～１２　最大最小１３～１６　方程式と不等式１７～２４

テキスト配布が遅くなってごめん。とりあえず、「接線」から基礎と標準を順番にやる。
ムズそうに見えるが、やってることは基本的。そないに大したことないからガンバレ。冬休みにゆっくり考えてください。

8 [2003 大阪市立大]有名問題（基本）

正の実数 x に対して，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とする．

(1)　関数 $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

(2)　自然数 a，b で，$a<b$ かつ $a^b=b^a$ となるものをすべて求めよ．

9 [2015 愛媛大]関数の増減･凹凸

$x>0$ において定義された関数 $f(x)=e^x\log x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の値域を求めよ。

(2)　$f(x)$ の増減を調べよ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ はただ１つの変曲点をもつことを示せ。

(4)　点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ を曲線 $y=f(x)$ の変曲点とするとき，$\dfrac{1}{2}<\alpha<\dfrac{2}{e}$ であることを示せ。

10 [2010 神戸大]関数の増減（標準）

a を実数とする。関数 $f(x)=ax+\cos x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$ が極値をもたないように，a の値の範囲を定めよ。

11 [2011 名古屋工業大]グラフの増減と極値（応用）

k を正の定数とする。関数

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{k}{(x+1)^2}\ (x>0),\quad g(x)=\frac{(x+1)^3}{x^2}\ (x>0)$$

について，次の問いに答えよ。

(1)　$g(x)$ の増減を調べよ。

(2)　$f(x)$ が極値をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

(3)　$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるとき，極値 $f(a)$ を a だけの式で表せ。

(4)　k が (2) で求めた範囲にあるとき，$f(x)$ の極大値は $\dfrac{1}{8}$ より小さいことを示せ。

12 [2009 津田塾大]（応用）

$f(x)=x\sin x$ とする。このとき，$f'(x)$ は $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ において減少し，$f(x)$ は $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ において極大値をとることを示せ。

13 [2001 神戸大]最大最小（基本）

$0<\theta<\pi$ を満たす θ に対して平面上の３点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{C}(\cos\theta,\ -\sin\theta)$ を考える．

(1)　△ABC の面積 $S(\theta)$ を求めよ．

(2)　$S(\theta)$ の最大値を求めよ．

14 [2020 早稲田大]最大最小（標準）

半径１の円に外接する AB＝AC の二等辺三角形 ABC において $\angle\mathrm{BAC}=2\theta$ とする。

(1)　AC を θ の三角関数を用いて表せ。

(2)　AC が最小となるときの $\sin\theta$ を求めよ。

15 [2008 信州大]最大最小（標準）

AB＝AC＝１の二等辺三角形 ABC において，BC＝$2x$，内接円の半径を r とする。
次の問いに答えよ。

(1)　r を x で表せ。

(2)　r を最大にする x の値を求めよ。

16 [2019 兵庫県立大]最大最小　極値（応用）

a を定数とする。$0<x<\pi$ において，関数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{4+\cos x}$ および $g(x)=f(x)-ax$ を考える。

(1)　$f(x)$ の最大値を求めよ。

(2)　$g(x)$ が極値をとるような a の値の範囲を求めよ。

2022冬セミ　高２　理系数学標準～極限と微分法～
極限1～4　接線5～7　グラフの増減8～１２　最大最小１３～１６　方程式と不等式１７～２４

テキスト配布が遅くなってごめん。とりあえず、「接線」から基礎と標準を順番にやる。
ムズそうに見えるが、やってることは基本的。そないに大したことないからガンバレ。冬休みにゆっくり考えてください。

17 [2020 琉球大]方程式の解の個数（基本）

a を正の実数とする。$x>0$ において，曲線 $y=\log x$ と曲線 $y=\sqrt{ax}$ が共有点をもたないような a の値の範囲を求めよ。

18 [2007 愛知教育大]方程式の解の個数（標準）

a を定数とするとき，方程式 $e^{-\frac{1}{4}x^2}=a(x-3)$ の異なる実数解の個数を，a の値で場合分けして調べよ。

19 [2019 京都産業大]接線の本数（標準）

log を自然対数，e を自然対数の底，$a>0$ とする。xy 平面上の 2 つの曲線を C_1：$y=\log x$，C_2：$y^2=ax$ とし，曲線 C_1 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ における曲線 C_1 の接線を ℓ とする。

(1)　曲線 C_1 の接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2)　曲線 C_1 の接線 ℓ が曲線 C_2 にも接するとき，a の値を t を用いて表せ。

(3)　2 つの曲線 C_1 および C_2 の両方に接する直線の本数を求めよ。必要なら，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0$ であることを用いてよい。

20 [2013 香川大]接線（応用）

曲線 C：$y=\dfrac{\log x}{x}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　曲線 C の概形をかけ。

(2)　C の変曲点 P における，C の接線 ℓ の方程式を求めよ。

(3)　ℓ と C は，P 以外に共有点をもたないことを示せ。

21 [2008 福島県立医科大]不等式の証明（基本）

すべての $x\geqq 0$ について，$x-\dfrac{x^3}{6}\leqq\sin x\leqq x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$ が成り立つことを示せ。

22 [2008 岡山理科大]不等式の証明（基本）

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $\sin x+\tan x>2x$ が成り立つことを証明せよ。

23 [2017 中央大]不等式の証明（応用）

(1)　$x>-1$ において，不等式 $\log(1+x)\leqq x$ が成り立つことを示せ。

(2)　$x\geqq 0$ のとき，不等式 $x-\dfrac{x^2}{2}\leqq\log(1+x)$ が成り立つことを示せ。

(3)　自然数 n に対し

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

と定める。このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

24 [2012 愛媛大]不等式の証明（応用）

(1)　関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\log(1+x)$ を微分せよ。

(2)　$0<x<y$ のとき $\dfrac{1}{x}\log(1+x)>\dfrac{1}{y}\log(1+y)$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\left(\dfrac{1}{11}\right)^{\frac{1}{10}}$，$\left(\dfrac{1}{13}\right)^{\frac{1}{12}}$，$\left(\dfrac{1}{15}\right)^{\frac{1}{14}}$ を大きい方から順に並べよ。