$\boxed{1}$ [2011 東北大]

実数 a に対し，不等式 $y \leqq 2ax - a^2 + 2a + 2$ の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく。

(1) $-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ。

(2) $-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ。

$\boxed{2}$ [2007 九州大]

a，b を正の数とし，空間内の 3 点 $\mathrm{A}(a,\ -a,\ b)$，$\mathrm{B}(-a,\ a,\ b)$，$\mathrm{C}(a,\ a,\ -b)$ を考える。A，B，C を通る平面を α，原点 O を中心とし A，B，C を通る球面を S とおく。

(1) 線分 AB の中点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DO}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であることを示せ。また △ABC の面積を求めよ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$ のなす角を θ とするとき，$\sin\theta$ を求めよ。また，平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき，線分 OH の長さを求めよ。

(3) 点 P が球面 S 上を動くとき，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。ただし，P は平面 α 上にはないものとする。

$\boxed{3}$ [2013 名古屋大]

3 人でジャンケンをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で出すものとする。負けた人は脱落し，残った人で次回のジャンケンを行い (アイコのときは誰も脱落しない)，勝ち残りが 1 人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3 人でジャンケンを始め，ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に 2 人が残っている確率を p_n，3 人が残っている確率を q_n とおく。

(1) p_1，q_1 を求めよ。

(2) p_n，q_n が満たす漸化式を導き，p_n，q_n の一般項を求めよ。

(3) ちょうど n 回目で 1 人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。

$\boxed{4}$ [2006 東北大]

$x>0$ において，関数 $f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}$ を考える。

(1) $f'(2)$ を求め，$x>2$ のとき $f'(x)<1$ であることを示せ。

(2) k が自然数のとき，$f'\left(\dfrac{1}{k}\right)$ を求めよ。

(3) $f'(x)=1$ となる x を値の大きいものから順に x_1，x_2，x_3，…… とおく。

$n\geqq 2$ である自然数 n に対して，$\dfrac{1}{n}<x_n<\dfrac{1}{n-1}$ を示せ。

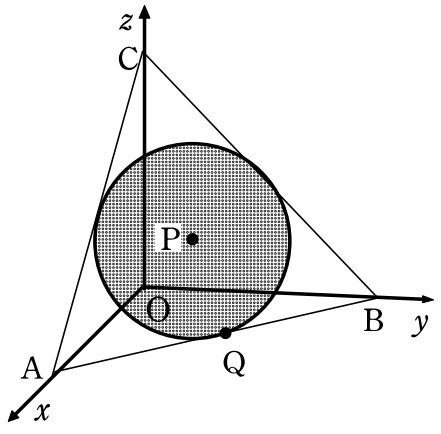
(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ を求めよ。

$\boxed{5}$ [2009 宮崎大]

n を自然数とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}}+\cdots\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$ を求めよ。

$\boxed{6}$ [2013 筑波大]

xyz 空間において，点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ を通る平面上にあり，正三角形 ABC に内接する円板を D とする。円板 D の中心を P，円板 D と辺 AB の接点を Q とする。



(1) 点 P と点 Q の座標を求めよ。

(2) 円板 D が平面 $z=t$ と共有点をもつ t の範囲を求めよ。

(3) 円板 D と平面 $z=t$ の共通部分が線分であるとき，その線分の長さを t を用いて表せ。

(4) 円板 D を z 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ。