$\boxed{1}$ [1998 北海道大]

次の条件で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$a_1=1,\ \frac{2^n}{n!}=\sum_{k=1}^{n+1} a_k a_{n+2-k}\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

$\boxed{2}$ [1998 電気通信大]

Oを原点とする座標空間内に，4 点 A$(1,\ 0,\ -1)$，B$(2,\ 1,\ 0)$，C$(-1,\ 2,\ -1)$，D$(-2,\ -1,\ 3)$ がある．線分 AB を $s:(1-s)$ に内分する点を P とし，線分 CD を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ で定まる点 R に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $s,\ t$ を用いて表せ.

(2) $s,\ t$ が $0\leqq s\leqq 1,\ 0\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くとき，点 R が描く図形 F の面積を求めよ.

(3) 点 R が図形 F 上を動くとき，線分 OR が動いてできる立体の体積を求めよ.

$\boxed{3}$ [1998 一橋大]

H 大学には 4 つの食堂があり，A 君と B さんは，それぞれ毎日正午に，前日とは異なる 3 つの食堂のうち 1 つを無作為に選んで昼食をとることにしている．最初の日，2 人は別々の食堂で食事をしたとして，次の確率を求めよ.

(1) n 日後に，初めて 2 人が食堂で出会う確率．ただし，$n\geqq 1$ とする.

(2) n 日後に，2 人が食堂で出会うのがちょうど 2 回目である確率．ただし，$n\geqq 2$ とする.

$\boxed{4}$ [2013 東京工業大]

k を定数とするとき，方程式 $e^x - x^e = k$ の異なる正の解の個数を求めよ。

$\boxed{5}$ [2007 大阪府立大]

曲線 C : $y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ における接線を ℓ_t とする。また，α，β は $0 < \alpha < \beta$ を満たす定数とし，2 本の接線 ℓ_α，ℓ_β と曲線 C で囲まれる図形を D とする。

(1) D の面積を求めよ。

(2) $\alpha < t < \beta$ のとき，D のうち接線 ℓ_t の上側にある部分の面積 $S(t)$ を最小にする t を求めよ。

$\boxed{6}$ [2012 首都大学東京]

e は自然対数の底とする。$f(x) = x\log x$ （$x > 0$，$\log x$ は x の自然対数）とおく。$t > e$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 A における接線の傾きが $\log t$ となるとき，A の x 座標 $a(t)$ を求めよ。

(2) $x \geqq 1$ の範囲において，曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a(t)$ で囲まれた部分の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) $t \longrightarrow \infty$ のとき，$\dfrac{S(t)}{t^p \log t}$ が 0 でない値に収束するような正の定数 p の値を求めよ。

また，そのときの $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \frac{S(t)}{t^p \log t}$ を求めよ。