$\boxed{1}$ [2003 東京大]

さいころを n 回振り，第 1 回目から第 n 回目までに出たさいころの目の数 n 個の積を X_n とする．

(1) X_n が 5 で割り切れる確率を求めよ．

(2) X_n が 4 で割り切れる確率を求めよ．

(3) X_n が 20 で割り切れる確率を p_n とおく．$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)$ を求めよ．

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする．

$\boxed{2}$ [1999 北海道大]

関数 $f(x)=\frac{1}{1+e^{-px}}-ax$ が極値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ．ただし，p は正の定数で，e は自然対数の底である．

$\boxed{3}$ [2011 九州大]

数列 a_1，a_2，……，a_n，…… は

$$a_{n+1}=\frac{2a_n}{1-a_n{}^2},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$$

を満たしているとする。

(1) $a_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき，一般項 a_n を求めよ。

(2) $\tan\frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3) $a_1=\tan\frac{\pi}{20}$ とするとき，

$$a_{n+k}=a_n,\quad n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots$$

を満たす最小の自然数 k を求めよ。

$\boxed{4}$ [2009 東京工業大]

N を正の整数とする。$2N$ 以下の正の整数 m，n からなる組 $(m,\ n)$ で，方程式 $x^2-nx+m=0$ が N 以上の実数解をもつようなものは何組あるか。

$\boxed{5}$ [2007 九州大]

a，b を正の数とし，空間内の 3 点 $\mathrm{A}(a,\ -a,\ b)$，$\mathrm{B}(-a,\ a,\ b)$，$\mathrm{C}(a,\ a,\ -b)$ を考える。A，B，C を通る平面を α，原点 O を中心とし A，B，C を通る球面を S とおく。

(1) 線分 AB の中点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DO}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であることを示せ。また △ABC の面積を求めよ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$ のなす角を θ とするとき，$\sin\theta$ を求めよ。また，平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき，線分 OH の長さを求めよ。

(3) 点 P が球面 S 上を動くとき，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。ただし，P は平面 α 上にはないものとする。

$\boxed{6}$ [2000 防衛大学校]

曲線 C : $y=\sin^2 x$ と x 軸に平行な直線 L : $y=\sin^2 t$ について，次の問いに答えよ．ただし，t は $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数である．

(1) 自然数 $n\geqq 2$ について，$\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\pi<x<n\pi$ における C と L との交点の x 座標を x_n で表す．$t\leqq x\leqq x_n$ なる範囲において，C と L により囲まれた $2n-1$ 個の部分の面積の総和 $S_n(t)$ を求めよ．

(2) t が $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ なる範囲を動くとき，$S_n(t)$ が最小となる t の値 t_n を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2(1-\sin 2t_n)$ を求めよ．

$\boxed{7}$ [2005 東京工業大]

D を半径 1 の円盤，C を xy 平面の原点を中心とする半径 1 の円周とする。D が次の条

件 (a)，(b) をともに満たしながら xyz 空間内を動くとき，D が通過する部分の体積を求めよ。

(a)　D の中心は C 上にある。

(b)　D が乗っている平面は常にベクトル $(0,\ 1,\ 0)$ と直交する。