$\boxed{1}$ [1997 北海道大]

実数 x に対し，x 以下の整数のうちで最大のものを $[x]$ と書くことにする．$c>1$ として，$a_n=\dfrac{[nc]}{c}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ とおく．以下を証明せよ．

(1) すべての n に対して，$[a_n]$ は n または $n-1$ に等しい．

(2) c が有理数のときは，$[a_n]=n$ となる n が存在する．

(3) c が無理数のときは，すべての n に対して $[a_n]=n-1$ となる．

$\boxed{2}$ [2009 横浜国立大]

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を $a_1=3$，$b_1=8$，$c_1=24$ と関係式

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+b_n \\ b_{n+1}=4b_n+c_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \\ c_{n+1}=8c_n \end{cases}$$

で定める。

(1) b_n を n の式で表せ。

(2) $a_{n+3}-a_n$ は 7 で割り切れることを示し，a_n が 7 で割り切れるための n の条件を求めよ。

$\boxed{3}$ [2010 千葉大]

a を 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点 O (0, 0)，A (1, 0) をとる。曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ が，3 条件

（ア） $p>0$，$q>0$　　（イ） $\angle\mathrm{AOP}<\angle\mathrm{AOQ}$

（ウ） $\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は 3 に等しい

を満たしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ。

$\boxed{4}$ [2012 首都大学東京]

e は自然対数の底とする。$f(x)=x\log x$ ($x>0$, $\log x$ は x の自然対数) とおく。$t>e$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 A における接線の傾きが $\log t$ となるとき，A の x 座標 $a(t)$ を求めよ。

(2) $x\geqq 1$ の範囲において，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=a(t)$ で囲まれた部分の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) $t\longrightarrow\infty$ のとき，$\dfrac{S(t)}{t^p\log t}$ が 0 でない値に収束するような正の定数 p の値を求めよ。

また，そのときの $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{t^p\log t}$ を求めよ。

$\boxed{5}$ [1998 一橋大]

H 大学には 4 つの食堂があり，A 君と B さんは，それぞれ毎日正午に，前日とは異なる 3 つの食堂のうち 1 つを無作為に選んで昼食をとることにしている．最初の日，2 人は別々の食堂で食事をしたとして，次の確率を求めよ．

(1) n 日後に，初めて 2 人が食堂で出会う確率．ただし，$n\geqq 1$ とする．

(2) n 日後に，2 人が食堂で出会うのがちょうど 2 回目である確率．ただし，$n\geqq 2$ とする．

$\boxed{6}$ [1998 東京大]

xyz 空間に 3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(-1,\ 0,\ 0)$，C$(0,\ \sqrt{3},\ 0)$ をとる．△ABC を 1 つの面とし，$z\geqq 0$ の部分に含まれる正四面体 ABCD をとる．更に △ABD を 1 つの面とし，点 C と異なる点 E をもう 1 つの頂点とする正四面体 ABDE をとる．

(1) 点 E の座標を求めよ．

(2) 正四面体 ABDE の $y\leqq 0$ の部分の体積を求めよ．