$\boxed{1}$ [2015 九州大]

(1) n が正の偶数のとき，2^n-1 は 3 の倍数であることを示せ。

(2) n を自然数とする。2^n+1 と 2^n-1 は互いに素であることを示せ。

(3) p，q を異なる素数とする。$2^{p-1}-1=pq^2$ を満たす p，q の組をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ [2015 信州大]

次の条件 (*) を満たすような実数 a で最大のものを求めよ。

(*) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲のすべての x に対して

$$\cos x \leqq 1-ax^2$$

が成り立つ。

$\boxed{3}$ [2002 名古屋大]

a，b を正数とし，xy 平面で不等式

$$\frac{\{x-(1-a)\}^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqq 1$$

の表す領域 D と，不等式 $x^2+y^2 \leqq 1$ の表す領域 E を考える.

(1) $a=2$，$b=1$ の場合に，領域 D を図示せよ.

(2) D が E に含まれるための a，b の条件を求め，ab 平面上でその条件の表す領域を図示せよ.

$\boxed{4}$ [2009 東京工業大]

N を正の整数とする。$2N$ 以下の正の整数 m，n からなる組 $(m,\ n)$ で，方程式 $x^2-nx+m=0$ が N 以上の実数解をもつようなものは何組あるか。

$\boxed{5}$ [2008 名古屋大]

曲線 C : $y=\log x$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ \log a)$，点 $\mathrm{Q}(b,\ \log b)$ $(1<a<b)$ をとる。点 P，Q から x 軸に下ろした 2 本の垂線と x 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を S とする。点 P，Q から y 軸に下ろした 2 本の垂線と y 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を T とする。このとき，$S=T$ となるように b がとれる a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{6}$ [2014 東京医科歯科大]

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し，xyz 空間内の 4 点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$，
$\mathrm{B}(-\cos\theta,\ -\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{C}(\cos\theta,\ -\cos\theta,\ -\sin\theta)$，
$\mathrm{D}(-\cos\theta,\ \cos\theta,\ -\sin\theta)$ を頂点とする四面体の体積を $V(\theta)$，この四面体の xz 平面による切り口の面積を $S(\theta)$ とする。

(1) $S\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$V\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ をそれぞれ求めよ。

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ における $S(\theta)$ の最大値を求めよ。

(3) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ における $V(\theta)$ の最大値を求めよ。