$\boxed{1}$ [1998 北海道大]

次の条件で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$a_1=1,\ \frac{2^n}{n!}=\sum_{k=1}^{n+1} a_k a_{n+2-k}\ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

$\boxed{2}$ [2010 千葉大]

a を 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点 O (0, 0)，A (1, 0) をとる。曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ が，3 条件

（ア） $p>0$，$q>0$　　（イ） $\angle\mathrm{AOP}<\angle\mathrm{AOQ}$

（ウ） $\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は 3 に等しい

を満たしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ。

$\boxed{3}$ [2015 静岡大]

i を虚数単位，r を 1 より大きい実数とし，$w=r\left(\cos\dfrac{\pi}{24}+i\sin\dfrac{\pi}{24}\right)$ とおく。また，数列 $\{z_n\}$ を次の式で定める。

$$z_1=w,\quad z_{n+1}=z_n w^{n+2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) z_2 を r を用いて表せ。

(2) z_n の偏角の 1 つを n を用いて表せ。

(3) 複素数平面で原点を O，z_n で表される点を P_n とする。$7\leqq n\leqq 48$ のとき，$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}$ が $\angle\mathrm{O}=\dfrac{\pi}{3}$ を満たす直角三角形となるような n と r をそれぞれ求めよ。また，そのときの z_n の偏角 θ を $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で求めよ。

$\boxed{4}$ [2014 津田塾大]

座標空間内の球 $S: x^2+y^2+(z-1)^2=1$ および 3 点 A$(0,\ 0,\ 2)$, B$(2,\ 0,\ 0)$, C$(0,\ 2,\ 0)$ を考える。線分 BC の中点を D，球 S と線分 AB の交点のうち A とは異なる点を P，球 S と線分 AD の交点のうち A とは異なる点を Q とする。また，3 点 A，B，C を含む平面に球 S の中心から下した垂線の足を H とする。

(1) 点 P，Q，H の座標を求めよ。

(2) $\angle$PHQ を求めよ。

(3) 三角形 ABD (内部を含む) と球 S の共通部分となる円弧の長さを求めよ。

$\boxed{5}$ [2003 東京大]

さいころを n 回振り，第 1 回目から第 n 回目までに出たさいころの目の数 n 個の積を X_n とする.

(1) X_n が 5 で割り切れる確率を求めよ.

(2) X_n が 4 で割り切れる確率を求めよ.

(3) X_n が 20 で割り切れる確率を p_n とおく. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)$ を求めよ.

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする.

$\boxed{6}$ [1999 大阪大]

xyz 空間内に 2 つの立体 K と L がある．どのような a に対しても，平面 $z=a$ による立体 K の切り口は 3 点 $(0,\ 0,\ a)$, $(1,\ 0,\ a)$, $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ a\right)$ を頂点とする正三角形である．また，どのような a に対しても，平面 $y=a$ による立体 L の切り口は 3 点 $(0,\ a,\ 0)$, $\left(0,\ a,\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(1,\ a,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を頂点とする正三角形である．このとき，立体 K と L の共通部分の体積を求めよ.