$\boxed{1}$ [2008 東京大]

放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 P，Q がある。線分 PQ の中点の y 座標を h とする。

(1) 線分 PQ の長さ L と傾き m で，h を表せ。

(2) L を固定したとき，h がとりうる値の最小値を求めよ。

$\boxed{2}$ [2004 東京大]

片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある．この 3 枚の板を机の上に横に並べ，次の操作を繰り返し行う．

さいころを振り，出た目が 1，2 であれば左端の板を裏返し，3，4 であればまん中の板を裏返し，5，6 であれば右端の板を裏返す．

たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば，色の並び方は「黒白白」となる．更に 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば，色の並び方は「黒白黒」となる．

(1) 「白白白」から始めて，3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ．

(2) 「白白白」から始めて，n 回の操作の結果，色の並び方が「白白白」または「白黒白」となる確率を求めよ．

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする．

$\boxed{3}$ [2015 北海道大]

p を 3 以上の奇数，θ を $\cos\theta=\dfrac{1}{p}$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たす実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$a_n=p^n\cos(n\theta)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定める。

(1) a_2 を p で表せ。

(2) a_{n+2} を a_{n+1}，a_n，p で表せ。

(3) すべての n について a_n は p で割り切れない整数であることを示せ。

$\boxed{4}$ [2015 東北大]

$t>0$ を実数とする。座標平面において，3 点 A$(-2,\ 0)$，B$(2,\ 0)$，P$(t,\ \sqrt{3}\,t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

(1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。

(2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。

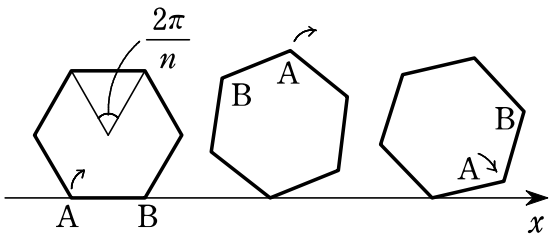
(3) 辺 AB，BP，PA の中点をそれぞれ M，Q，R とおく。t が (1) で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ，QR，RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ。

$\boxed{5}$ [1999 北海道大]

関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-px}}-ax$ が極値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ．ただし，p は正の定数で，e は自然対数の底である．

$\boxed{6}$ [2003 北海道大]

半径 1 の円に内接する正 n 角形が xy 平面上にある．1 つの辺 AB が x 軸に含まれている状態から始めて，正 n 角形を図のように x 軸上をすべらないように転がし，再び点 A が x 軸に含まれる状態まで続ける．
点 A が描く軌跡の長さを $L(n)$ とする．



図は $n=6$ の場合

(1) $L(6)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} L(n)$ を求めよ．